Polynômes

1 Divisibilité et division

Exercice 1 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq b$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X - a$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.

Exercice 2 Soient $A = X^{100} - X^4 + X - 1$ et $B = X^3 + X^2 + X + 1$. Calculer le reste de la division euclidienne de A par B.

Exercice 3 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $(X - 1)^2$ divise $P_n = aX^{n+1} + bX^n + 1$. Calculer alors le quotient.

Exercice 4

1. Déterminer les entiers naturels n tels que $X^2 + X + 1$ divise :
$$P_n = X^{2n} + X^n + 1$$
2. Pour tout entier naturel n, on pose $Q_n = (1 + X^4)^n - X^4$. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des entiers naturels n tels que $X^2 + X + 1$ divise Q_n.

Exercice 5 Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que m divise n si et seulement si $X^m - 1$ divise $X^n - 1$.

Exercice 6 On considère l'équation $(X^3-1)U+(X^2+1)V = 2X^2$, notée $\mathscr{E}$, d'inconnue $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$.

1. Déterminer $(X^3 - 1) \wedge (X^2 + 1)$ et en déduire une solution particulière (U_0, V_0) de l'équation $\mathscr{E}$.
2. En raisonnant par analyse-synthèse, déterminer l'ensemble des solutions de $\mathscr{E}$.

2 Factorisations

Exercice 7 Décomposer sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ les polynômes suivants :

1. $A = X^3 + 1$
2. $B = X^4 + 1$
3. $C = X^4 + X^2 + 1$
4. $D = X^6 + 1$
5. $E = X^8 + 1$
6. $F = X^8 + X^4 + 1$
7. $G = X^4 - X^2 + 12$
8. $H = X^6 - 1$
9. $I = X^n + 1$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^{2k}$.

1. Montrer que la décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ de P_n s'écrit :
$$P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) X + 1 \right)$$
2. En déduire que :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$
3. Calculer la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 9 On considère le polynôme :
$$P = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$$

1. Vérifier que i est racine multiple de P.
2. En déduire la décomposition de P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 Soit $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$.

1. Vérifier que 2 est une racine multiple de P.
2. Déterminer toutes les racines de P.
3. Décomposer P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les racines cubiques de $\mathrm{e}^{i\alpha}$.

2. Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $P_\alpha = X^6 - 2\cos(\alpha)X^3 + 1$.

Exercice 12 On considère les polynômes :

$$P = 3X^4 - 9X^3 + 7X^2 - 3X + 2 \qquad \text{et} \qquad Q = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$$

1. Décomposer P et Q en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ puis sur $\mathbb{C}[X]$ (on pourra calculer les valeurs de P et Q en 1 et 2).
2. Déterminer le PGCD et le PPCM des polynômes P et Q.

Exercice 13 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme :

$$P_n = X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$$

3 Racines

Exercice 14 On note $\mathscr{E}$ l'équation $2z^3 - (7+2i)z^2 + (11+i)z - 4 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $\mathscr{E}$ admet une racine réelle que l'on calculera.
2. Résoudre l'équation $\mathscr{E}$.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ possède-t-il une racine multiple ?

Exercice 16 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^{\deg(P)}$$

4 Lien coefficients/racines

Exercice 18 Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} |x| = |y| = |z| = 1 \\ x + y + z = 1 \\ xyz = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

Exercice 19 Soient a, b et c les racines complexes du polynôme $P = X^3 - 2X + 5$.

1. Calculer $S = a^4 + b^4 + c^4$.
2. Déterminer un polynôme de degré 3 à coefficients entiers dont a^2, b^2 et c^2 sont les racines.

Exercice 20 Soient x, y et z trois nombres complexes non nuls tels que :

$$x + y + z = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

Montrer que $|x| = |y| = |z|$.

5 Divers

Exercice 21 On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$$

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.
2. Montrer que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclure quant à la parité des fonctions polynomiales associées.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\deg(P_n) = n$ et déterminer le coefficient dominant de P_n.
4. (a) Vérifier que :
   $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \qquad \cos(nx) = P_n(\cos(x))$$
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est scindé à racines simples et préciser ses racines.

Exercice 22 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X)$$

Exercice 23 Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1. Montrer que 0 n'est pas racine de P.
2. Montrer que les racines de P sont de module 1.
3. En déduire tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.