

NOMBRES RÉELS

(corrigés)

Exercice 1

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Par croissance stricte de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, comme $\sqrt{a+b}, \sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b} &\leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \iff a+b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ &\iff a+b \leq a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b \\ &\iff 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{a} \geq 0$ et $\sqrt{b} \geq 0$, la dernière inégalité est vraie.. On a donc bien $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

On a égalité si et seulement si la dernière inégalité est une égalité, *i.e.* si et seulement si $\sqrt{a} = 0$ ou $\sqrt{b} = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \iff a = 0 \text{ ou } b = 0}$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$|x| = |y + (y - x)| \leq |y| + |y - x| = |y| + |x - y|$$

La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\sqrt{|x|} \leq \sqrt{|y| + |x - y|}$$

puis, en utilisant la question 1. avec $a = |y| \in \mathbb{R}_+$ et $b = |x - y| \in \mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\sqrt{|x|} \leq \sqrt{|y|} + \sqrt{|x - y|} \quad \text{i.e.} \quad \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \leq \sqrt{|x - y|}$$

En échangeant les rôles joués par x et y , on a aussi :

$$\sqrt{|y|} - \sqrt{|x|} \leq \sqrt{|x - y|} \quad \text{i.e.} \quad -\sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}$$

Finalement :

$$-\sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \leq \sqrt{|x - y|},$$

i.e. :

$$\boxed{|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| \leq \sqrt{|x - y|}}$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$2|x| = |2x| = |(x + y) + (x - y)| \leq |x + y| + |x - y|$$

d'après l'inégalité triangulaire. De la même manière :

$$2|y| = |2y| = |(x + y) - (x - y)| \leq |x + y| + |x - y|$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$2|x| + 2|y| \leq 2|x + y| + 2|x - y|$$

Finalement :

$$\boxed{|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|}$$

Exercice 2

1. Soit $x \in [-1, 1]$. La fonction $t \mapsto t^2 - 3t + 2$ est décroissante sur $[-1, 1]$ donc :

$$0 \leq x^2 - 3x + 2 \leq 6$$

Par ailleurs :

$$0 \leq x^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq \sqrt{x+1} + 1 \leq \sqrt{2} + 1$$

Par conséquent :

$$1 \leq x^2 + \sqrt{x+1} + 1 \leq 2 + \sqrt{2} \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \leq \frac{1}{x^2 + \sqrt{x+1} + 1} \leq 1$$

Par conséquent :

$$\boxed{0 \leq \lambda \leq 6}$$

2. Soient $x, y \in [1, 2]$. On a $-2 \leq -x \leq -1$ et $2 \leq y^2 + 1 \leq 5$ donc :

$$0 \leq -x + y^2 + 1 \leq 4$$

De plus :

$$1 \leq x^2 \leq 4 \quad \text{et} \quad 0 \leq y^2 - y = y(y - 1) \leq 2$$

donc $1 \leq x^2 + y^2 - y \leq 2$. On en déduit que :

$$\boxed{0 \leq \lambda \leq 4}$$

Exercice 3 On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de chaque (in)équation.

1. Le domaine de validité de l'équation est $V = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$. Soit $x \in V$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(|x+1|) - \ln(|2x+1|) = 0 &\iff \ln(|x+1|) = \ln(|2x+1|) \\ &\iff |x+1| = |2x+1| \end{aligned}$$

par injectivité de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $|2x+1| \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \ln(|x+1|) - \ln(|2x+1|) = 0 &\iff \frac{|x+1|}{|2x+1|} = 1 \\ &\iff \left| \frac{x+1}{2x+1} \right| = 1 \\ &\iff \frac{x+1}{2x+1} = -1 \text{ ou } \frac{x+1}{2x+1} = 1 \\ &\iff x+1 = -2x-1 \text{ ou } x+1 = 2x+1 \\ &\iff x = -\frac{2}{3} \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

Comme $0, -\frac{2}{3} \in V$, on peut conclure que :

$$V = \left\{-\frac{2}{3}, 0\right\}$$

2.
3.
4.
5.

Exercice 4 On note $\mathcal{D}$ le domaine de validité de chaque (in)équation et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

1. Le domaine de validité de l'équation est $\mathcal{D} = [-2, +\infty[$. Soit $x \in \mathcal{D}$. On distingue deux cas.

★ **Premier cas :** $x \in [-2, 4[$

On a $\sqrt{x+2} \geq 0$ et $x-4 < 0$ donc $\sqrt{x+2} \neq x-4$. Autrement dit, x n'est pas solution de l'équation.

★ **Deuxième cas :** $x \in [4, +\infty[$

Comme $\sqrt{x+2}, x-4 \in \mathbb{R}_+$, on a par croissance stricte de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} = x-4 &\iff x+2 = (x-4)^2 &\iff x+2 = x^2 - 8x + 16 \\ &\iff x^2 - 9x + 14 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant vaut 25, les racines (réelles) valent donc 2 et 7. La seule solution dans l'intervalle $[4, +\infty[$ est 7.

On conclut donc que :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation est donc } \mathcal{S} = \{7\}}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -4 \end{cases} \iff x \geq 1$$

donc $\mathcal{D} = [1, +\infty[$. Soit $x \in [1, +\infty[$. Comme $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4}, \sqrt{5} \in \mathbb{R}_+$, on a par croissance stricte de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5} &\iff (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4})^2 = 5 \\ &\iff (x-1) + 2\sqrt{(x-1)(x+4)} + (x+4) = 5 \\ &\iff \sqrt{(x-1)(x+4)} = 1-x \end{aligned}$$

On remarque que $x = 1$ est solution (les deux membres de l'équation précédente valant 0). Si $x > 1$, alors $1-x < 0$ et $\sqrt{(x-1)(x+4)} > 0$ donc :

$$\sqrt{(x-1)(x+4)} \neq 1-x$$

Autrement dit, x n'est pas solution de l'équation. Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in \mathcal{D} \iff x^2 - x - 2 \geq 0 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$$

donc $\mathcal{D} =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$. Soit $x \in \mathcal{D}$. On distingue deux cas.

★ **Premier cas :** $x \in]-\infty, -1]$

On a ici $3x+2 \leq -1 < 0$ et $\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$ donc $\sqrt{x^2-x-2} \neq 3x+2$. Ainsi, x n'est pas solution de l'équation.

★ **Deuxième cas :** $x \in [2, +\infty[$

Comme $\sqrt{x^2 - x - 2}, 3x + 2 \in \mathbb{R}_+$, on a par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - x - 2} = 3x + 2 &\iff x^2 - x - 2 = (3x + 2)^2 \\ &\iff x^2 - x - 2 = 9x^2 + 12x + 4 \\ &\iff 8x^2 + 13x + 6 = 0\end{aligned}$$

Cette équation n'admet pas de racine réelle car son discriminant, qui vaut -23 , est strictement négatif. Ainsi, l'équation n'admet pas de solution dans l'intervalle $[2, +\infty[$.

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$$

4. Le domaine de validité de l'inéquation est $\mathcal{D} = [-1, +\infty[$. Soit $x \in \mathcal{D}$. On distingue deux cas.

★ **Premier cas :** $x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]$

On a $\sqrt{x+1} \geq 0$ et $2x-3 \leq 0$ donc $\sqrt{x+1} \geq 2x-3$. Ainsi, x n'est pas solution de l'inéquation.

★ **Deuxième cas :** $x \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

On a $\sqrt{x+1}, 2x-3 \in \mathbb{R}_+$ donc (par croissance stricte de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$) :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} < 2x-3 &\iff x+1 < (2x-3)^2 \\ &\iff x+1 < 4x^2 - 12x + 9 \\ &\iff 4x^2 - 13x + 8 > 0 \\ &\iff x \in \left]-\infty, \frac{13-\sqrt{41}}{8}\right[\cup \left]\frac{13+\sqrt{41}}{8}, +\infty\right[\end{aligned}$$

Or $36 < 41 < 49$ donc $6 < \sqrt{41} < 7$ puis $-7 < -\sqrt{41} < -6$ et donc :

$$\frac{13-\sqrt{41}}{8} < \frac{13-6}{8} = \frac{7}{8} < \frac{3}{2}$$

et :

$$\frac{13+\sqrt{41}}{8} > \frac{13+6}{8} = \frac{19}{8} > \frac{3}{2} \quad \text{car} \quad 2 \times 19 > 3 \times 8$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \left(\left[-\infty, \frac{13-\sqrt{41}}{8} \right[\cup \left] \frac{13+\sqrt{41}}{8}, +\infty \right[\right) \cap \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[\\ &= \left] \frac{13+\sqrt{41}}{8}, +\infty \right[\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left] \frac{13+\sqrt{41}}{8}, +\infty \right[}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in \mathcal{D} \iff x^2 - x - 20 \geq 0 \iff x \in]-\infty, -4] \cup [5, +\infty[$$

donc $\mathcal{D} =]-\infty, -4] \cup [5, +\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas.

★ **Premier cas :** $x \in]-\infty, -4]$

Dans ce cas, $\sqrt{x^2 - x - 20} \geq 0$ et $x \leq 0$ donc $\sqrt{x^2 - x - 20} \geq x$. Autrement dit, x est solution de l'inéquation.

★ **Deuxième cas :** $x \in [5, +\infty[$

Comme $\sqrt{x^2 - x - 20}, x \in \mathbb{R}_+$, on a par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$\sqrt{x^2 - x - 20} \geq x \iff x^2 - x - 20 \geq x^2 \iff x \leq -20$$

Il n'y a donc pas de solution de l'inéquation dans l'intervalle $[5, +\infty[$.

Finalement :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \mathcal{S} =]-\infty, -4]}$$

6. Le domaine de validité de l'inéquation est $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$. Soit $x \in \mathcal{D}$. Comme $\sqrt{x+1}, \sqrt{4x-1} \in \mathbb{R}_+$, on a par croissance stricte de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} \geq \sqrt{4x-1} &\iff x+1 \geq 4x-1 \iff x \leq \frac{2}{3} \\ &\iff x \in \mathcal{D} \cap \left]-\infty, \frac{2}{3}\right]\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]}$$

7. Le domaine de validité de l'inéquation est $\mathcal{D} = [1, +\infty[$. Soit $x \in \mathcal{D}$. On a $\sqrt{x-1}, \sqrt{2x^2+1} \in \mathbb{R}_+$ donc (par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$) :

$$\sqrt{x-1} > \sqrt{2x^2+1} \iff x-1 > 2x^2+1 \iff 2x^2-x+2 < 0$$

et cette dernière inégalité n'est jamais vérifiée (en effet, le discriminant du trinôme vaut $-7 < 0$ donc le trinôme est du signe du coefficient dominant sur $\mathbb{R}$). Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = \emptyset}$$

Exercice 5

Exercice 6

1. ★ Par définition de l'image directe d'un ensemble par une application, on a :

$$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}$$

car la fonction f est à valeurs réelles. Autrement dit, $f(I)$ est une partie de $\mathbb{R}$.

- ★ Par hypothèse, I est un intervalle *non vide* de $\mathbb{R}$; on peut donc en considérer un élément x_0 . Le nombre réel $f(x_0)$ appartient à $f(I)$ donc $f(I) \neq \emptyset$.
 ★ On sait que f est une fonction majorée sur I . Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, f(x) \leq M$$

Autrement dit :

$$\forall a \in f(I), a \leq M$$

L'ensemble $f(I)$ est donc majoré (par M).

La propriété de la borne supérieure permet de conclure que :

$$\boxed{\text{l'ensemble } f(I) \text{ possède une borne supérieure}}$$

2. Soient $f, g \in \mathbb{R}^I$ deux fonctions majorées sur I . Par définition de la borne supérieure, $f(I)$ est majoré par $N(f)$ et $g(I)$ est majoré par $N(g)$. Soit $a \in (f+g)(I)$. Il existe $x \in I$ tel que $a = (f+g)(x)$. Alors :

$$a = f(x) + g(x) \leq N(f) + N(g) \quad (\text{car } f(x) \in f(I) \text{ et } g(x) \in g(I))$$

L'ensemble $(f+g)(I)$ est donc majoré par $N(f) + N(g)$. On sait que cet ensemble admet une borne supérieure (d'après la question 1. puisque $f+g$ est majorée sur I) et la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit majorant de l'ensemble donc :

$$\sup((f+g)(I)) \leq N(f) + N(g)$$

Autrement dit :

$$\boxed{N(f+g) \leq N(f) + N(g)}$$

L'intervalle $I = [0, 1]$ est non vide et les fonctions $f = \text{Id}_{[0,1]}$ et $g = -f$ sont majorées (respectivement par 1 et 0) sur I . On a $N(f) = 1$, $N(g) = 0$ et $N(f+g) = 0$ (la fonction $f+g$ est nulle sur $[0, 1]$). L'inégalité précédente peut donc être stricte.

Exercice 7

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons :

$$\mathcal{A}_x = \{|x-a| \mid a \in A\}$$

Il est clair que $\mathcal{A}_x$ est une partie de $\mathbb{R}$.

- ★ Cette partie est non vide puisque A est non vide (en effet, si a est un élément de A , alors $|x-a|$ appartient à $\mathcal{A}_x$).
 ★ De plus, $\mathcal{A}_x$ est minorée par 0 car :

$$\forall a \in A, |x-a| \geq 0$$

D'après la propriété de la borne inférieure, l'ensemble $\mathcal{A}_x$ admet une borne inférieure. Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in A, \text{ la quantité } d(x, A) \text{ est bien définie}}$$

2. Soit $x \in A$. On remarque que (en choisissant $a = x \in A$), le nombre $|x-x| = 0$ appartient à $\mathcal{A}_x$ (introduit à la question précédente). Par ailleurs, 0 minore $\mathcal{A}_x$ (vu à la question précédente). Donc $\mathcal{A}_x$ possède un minimum qui vaut 0. Ceci implique que $\inf(\mathcal{A}_x) = \min(\mathcal{A}_x) = 0$. Autrement dit, $d(x, A) = 0$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in A, d(x, A) = 0}$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in A$. Alors $d(x, A) \leq |x-a|$ (puisque $|x-a| \in \mathcal{A}_x$ et car $d(x, A)$ est un minorant de $\mathcal{A}_x$). Ensuite, d'après l'inégalité triangulaire :

$$d(x, A) \leq |(x-y) + (y-a)| \leq |x-y| + |y-a|$$

On en déduit que :

$$d(x, A) - |x-y| \leq |y-a|$$

On a donc montré que :

$$\forall a \in A, d(x, A) - |x-y| \leq |y-a|$$

Ainsi, $d(x, A) - |x-y|$ minore l'ensemble $\mathcal{A}_y$. Comme $d(y, A) = \inf(\mathcal{A}_y)$ est le plus grand minorant de $\mathcal{A}_y$, on a l'inégalité :

$$d(x, A) - |x-y| \leq d(y, A) \quad \text{i.e.} \quad d(x, A) - d(y, A) \leq |x-y|$$

En échangeant les rôles de x et y , on a aussi $d(y, A) - d(x, A) \leq |y-x| = |x-y|$. On a donc bien :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x-y|}$$

Exercice 8

1. (a) On utilise la propriété de la borne inférieure.

- ★ L'ensemble T est une partie de $\mathbb{R}$ (en fait, $T \subset [0, 1]$).
- ★ On a $f(1) \in [0, 1]$ donc $f(1) \leq 1$. Par conséquent, T est non vide.
- ★ Enfin, T est minorée par 0 (car $T \subset [0, 1]$).

On peut donc conclure que :

l'ensemble T admet une borne inférieure

- (b) On veut montrer que :

$$\forall x \in T, \quad f(t) \leq x$$

Soit $x \in T$. Comme t est la borne inférieure de T , ce nombre minore T donc $t \leq x$. Or f est croissante sur $[0, 1]$ (et $t, x \in [0, 1]$) donc $f(t) \leq f(x)$. Enfin, on sait que $f(x) \leq x$ (puisque $x \in T$). On a donc bien (par transitivité de la relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$) l'inégalité $f(t) \leq x$. Finalement :

$f(t)$ minore l'ensemble T

- (c) Montrons que $f(T) \subset T$. Soit $x \in f(T)$. Il existe $\tau \in T$ tel que $x = f(\tau)$. On veut montrer que $f(x) \leq x$. Comme $\tau \in T$, on a $f(\tau) \leq \tau$, c'est-à-dire $x \leq \tau$. Comme f est croissante sur $[0, 1]$ (et puisque $x, \tau \in [0, 1]$; en utilisant le fait que f soit à valeurs dans $[0, 1]$ pour x), on a $f(x) \leq f(\tau)$, c'est-à-dire $f(x) \leq x$. Ainsi, $x \in T$. Finalement :

$f(T) \subset T$

- (d) Pour montrer que $f(t) = t$, il suffit d'établir que $f(t) \leq t$ et $t \leq f(t)$ (par antisymétrie de la relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$).

- ★ On sait que t et $f(t)$ minorent T . Comme t est le plus grand minorant de T (par définition de la borne inférieure), on a nécessairement $f(t) \leq t$.
- ★ Cette inégalité signifie que t appartient à l'ensemble T . D'après la question 3., on a aussi $f(t) \in T$. Et, comme t minore T , on a nécessairement l'inégalité $t \leq f(t)$.

Finalement :

$f(t) = t$

2. Considérons la fonction $f : \begin{cases} [0, 1[& \longrightarrow & [0, 1[\\ x & \longmapsto & \frac{x+1}{2} \end{cases}$ (*représenter graphiquement f*).

- ★ La fonction f est bien à valeurs dans $[0, 1[$. En effet, pour tout $x \in [0, 1[$, on a $x+1 \in [0, 2[$ puis $f(x) \in [0, 1[$.
- ★ La fonction f est croissante sur $[0, 1[$ (c'est clair).

- ★ La fonction f n'admet pas de point fixe dans l'intervalle $[0, 1[$. En effet :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) = x \iff x+1 = 2x \iff x = 1 \notin [0, 1[$$

Par conséquent :

le théorème est faux si on remplace le segment $[0, 1]$ par l'intervalle $[0, 1[$

Exercice 9

1. ★ Soit $a \in A$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$. On a :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$$

donc $-1 \leq a \leq 2$. Ainsi :

$$\forall a \in A, \quad -1 \leq a \leq 2$$

On en déduit donc que :

la partie A est bornée

- ★ Le nombre 2 majore A et 2 appartient à A car $2 = (-1)^0 + \frac{1}{0+1}$ (et $0 \in \mathbb{N}$).

On en déduit que :

2 est le maximum et la borne supérieure de A : $\max(A) = \sup(A) = 2$

- ★ Montrons que -1 est la borne inférieure de A en utilisant la caractérisation séquentielle de la borne inférieure. Tout d'abord, -1 minore A . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$a_n = (-1)^{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)+1} = -1 + \frac{1}{2n+2} \in A$$

On a $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$ donc, d'après le résultat évoqué :

la borne inférieure de A est $\inf(A) = -1$

- ★ Montrons que A ne possède pas de minimum. Si A possède un minimum, alors celui-ci vaut $\min(A) = \inf(A) = -1$. On a alors $-1 \in A$ donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $-1 = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$. Si n est pair, alors :

$$(-1)^n + \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} > 0,$$

ce qui est absurde. L'entier n est donc impair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Ainsi :

$$-1 = (-1)^{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)+1} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{2k+2} = 0$$

On obtient à nouveau une absurdité. On peut donc conclure que :

l'ensemble A ne possède pas de minimum

2. (a) ★ Montrons que B est bornée, i.e. que :

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall b \in B, m \leq b \leq M$$

Soit $b \in B$. Il existe $y \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$b = \frac{y-1}{y+1} = \frac{(y+1)-2}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1}$$

Comme $y \geq 0$, on a $0 \leq \frac{1}{y+1} \leq 1$ puis $0 \leq \frac{2}{y+1} \leq 2$. Ainsi :

$$\forall b \in B, \quad -1 \leq b \leq 1$$

donc :

la partie B est bornée

- ★ Le nombre -1 minore B et $-1 = \frac{0-1}{0+1} \in B$ (car $y = 0 \in \mathbb{R}_+$) donc :

-1 est la borne inférieure et le minimum de B : $\inf(B) = \min(B) = -1$

- ★ Montrons que 1 est la borne supérieure de B en utilisant la caractérisation séquentielle de la borne supérieure. Tout d'abord, 1 majore l'ensemble B . Considérons de plus la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{n-1}{n+1} \in B \text{ (car } n \in \mathbb{R}_+)$$

Alors $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ (en factorisant par n au numérateur et au dénominateur). D'après le résultat évoqué :

la borne supérieure de B est $\sup(B) = 1$

- ★ Si B admettait un maximum, alors celui-ci serait nécessairement $\max(B) = \sup(B) = 1$. Ceci est absurde car $1 \notin B$. En effet :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{y-1}{y+1} < 1 \quad (\text{puisque } y-1 < y+1)$$

Ainsi :

l'ensemble B n'admet pas de maximum

Autre méthode. On considère la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{y-1}{y+1} \end{cases}$$

Par définition de l'image directe d'un ensemble par une application, on a :

$$f(\mathbb{R}_+) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}_+, x = f(y)\} = B$$

Une étude rapide de la fonction f fournit le tableau de variation suivant sur $\mathbb{R}_+$:

x	0	$+\infty$
f	-1	1

Ainsi, $B = f(\mathbb{R}_+) = [-1, 1[$ et on retrouve toutes les propriétés évoquées ci-dessus (bornitude, minimum, bornes inférieure/supérieure, absence de maximum).

- ★ Montrons que B est bornée. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $y \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$x = \frac{y-1}{y+1} = \frac{(y+1)-2}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1}$$

Comme $y \geq 0$, on a $0 \leq \frac{1}{y+1} \leq 1$ puis $0 \leq \frac{2}{y+1} \leq 2$. Ainsi :

$$\forall x \in B, \quad -1 \leq x \leq 1$$

donc :

la partie B est bornée

- ★ Le nombre -1 minore B et $-1 = \frac{0-1}{0+1} \in B$ (car $y = 0 \in \mathbb{R}_+$) donc :

-1 est la borne inférieure et le minimum de B : $\inf(B) = \min(B) = -1$

- ★ Montrons que 1 est la borne supérieure de B en utilisant la caractérisation séquentielle de la borne supérieure. Tout d'abord, 1 majore l'ensemble B . Considérons de plus la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{n-1}{n+1} \in B$$

Alors $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$. D'après le résultat évoqué :

la borne supérieure de B est $\sup(B) = 1$

- ★ Si B admettait un maximum, alors celui-ci serait nécessairement $\max(B) = \sup(B) = 1$. Ceci est absurde car $1 \notin B$. En effet :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{y-1}{y+1} < 1 \quad (\text{puisque } y-1 < y+1)$$

Ainsi :

l'ensemble B n'admet pas de maximum

- (b) ★ L'ensemble C est une partie de $\mathbb{R}$ non vide car, par exemple, $-1 = 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \in C$. Montrons que C est bornée. Soit $c \in C$. Il existe $m, n \in \mathbb{Z}^*$ tels que $c = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$. On a :

$$-1 \leq -\frac{1}{m} \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq -\frac{1}{n} \leq 1$$

donc $-1 \leq c \leq 3$. L'ensemble C est donc borné. D'après la propriété de la borne supérieure (et inférieure), C admet une borne supérieure et une borne inférieure.

- ★ On sait que $-1 \in C$ et que C est minoré par C . On en déduit que -1 est le minimum de C . Par conséquent :

$$\min(C) = \inf(C) = -1$$

- ★ On sait que C est majorée par 3 et on a $3 = 1 - \frac{1}{-1} - \frac{1}{-1} \in C$ donc 3 est le maximum de C . Ainsi :

$$\max(C) = \sup(C) = 3$$

(c)

Exercice 10

3. ★ Commençons par justifier que $A+B$ admet une borne supérieure. Tout d'abord, $A+B$ est une partie de $\mathbb{R}$ (puisque A et B sont des parties de $\mathbb{R}$). Par ailleurs, $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ donc il existe $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$. Alors $a_0 + b_0 \in A+B$ et donc $A+B$ est non vide.

Montrons maintenant que $A+B$ est majorée. Soit $c \in A+B$. Il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $c = a + b$ (par définition de $A+B$). Or $\sup(A)$ majore A et $a \in A$ donc $a \leq \sup(A)$. De la même manière, $b \leq \sup(B)$. Par conséquent, $c \leq \sup(A) + \sup(B)$. On a donc montré que :

$$\forall c \in A+B, \quad c \leq \sup(A) + \sup(B)$$

Ainsi, l'ensemble $A+B$ est majoré (par $\sup(A+B)$). La propriété de la borne supérieure assure donc l'existence de la borne supérieure de $A+B$. Par ailleurs, comme $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$, on a l'inégalité :

$$\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$$

- ★ Il reste à montrer l'inégalité inverse, à savoir que :

$$\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A+B)$$

Pour tous $a \in A$ et $b \in B$, comme $a+b \in A+B$, on a $a+b \leq \sup(A+B)$ (puisque $\sup(A+B)$ majore $A+B$). Fixons $b \in B$. Alors :

$$\forall a \in A, \quad a \leq \sup(A+B) - b$$

Ainsi, $\sup(A+B) - b$ est un majorant de A . Or $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A donc $\sup(A) \leq \sup(A+B) - b$. Ainsi :

$$\forall b \in B, \quad \sup(A) \leq \sup(A+B) - b,$$

ce que l'on peut réécrire :

$$\forall b \in B, \quad b \leq \sup(A+B) - \sup(A)$$

Donc $\sup(A+B) - \sup(A)$ majore B et comme $\sup(B)$ est le plus petit majorant de B , on a l'inégalité :

$$\sup(B) \leq \sup(A+B) - \sup(A) \quad \text{i.e.} \quad \sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A+B)$$

Finalement :

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

4. Soit $\alpha \in A$. Il existe $(x, y) \in [a, b]^2$ tel que $\alpha = \frac{x}{y}$. On a $0 < a \leq x \leq b$ et $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{a}$. En multipliant membre à membre (tous les nombres mis en jeu sont positifs), on obtient :

$$\frac{a}{b} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{a}$$

Ainsi :

$$\forall \alpha \in A, \quad \frac{a}{b} \leq \alpha \leq \frac{b}{a}$$

Par ailleurs, comme $a, b \in [a, b]$, on a $\frac{a}{b}, \frac{b}{a} \in A$. Donc $\frac{a}{b} \in A$ et ce nombre minore A . On en déduit que :

A admet un minimum, et donc une borne inférieure, qui valent $\min(A) = \inf(A) = \frac{a}{b}$

De même :

A admet un maximum, et donc une borne supérieure, qui valent $\max(A) = \sup(A) = \frac{b}{a}$

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sum_{k=1}^n (1 - a_k)^2 = \sum_{k=1}^n (1 - 2a_k + a_k^2) = \sum_{k=1}^n 1 - 2 \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n a_k^2$$

donc :

$$\sum_{k=1}^n (1 - a_k)^2 = n - 2 \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n a_k^2$$

2. ★ Soit $x \in E_n$. Il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{k=1}^n a_k^2$. Une somme de nombres positifs est positive donc $x \in \mathbb{R}_+$. On en déduit que :

l'ensemble E_n est minoré par 0

De plus, 0 appartient à E_n car $0 = \sum_{k=1}^n 0 = \sum_{k=1}^n 0^2$ donc :

l'ensemble E_n admet 0 pour minimum

★ Soit $x \in E_n$. Il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2$. D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=1}^n (1 - a_k)^2 = n - 2x + x = n - x$$

et donc :

$$x = n - \underbrace{\sum_{k=1}^n (1 - a_k)^2}_{\geq 0}$$

Ainsi :

l'ensemble E_n est majoré par n

On remarque que $n \in E_n$ car $n = \sum_{k=1}^n 1 = \sum_{k=1}^n 1^2$ donc :

l'ensemble E_n admet n pour maximum

Exercice 12

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas.

★ **Premier cas** : $x \in \mathbb{Z}$

Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor = x$ et $-x \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor -x \rfloor = -x$. Ainsi, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$.

★ **Deuxième cas** : $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Si x n'est pas un entier, alors on a les inégalités $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$. On en déduit que :

$$\underbrace{-\lfloor x \rfloor - 1}_{\in \mathbb{Z}} < -x < \underbrace{-\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbb{Z}}$$

On a un encadrement de $-x$ entre deux entiers successifs. Or la partie entière de $-x$ est, par définition, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $-x$. L'encadrement précédent implique que $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$. Ainsi :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$$

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Posons $k = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\ell = \lfloor y \rfloor$. On a $k \leq x < k + 1$, ce que l'on peut réécrire :

$$k \leq x < k + \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad k + \frac{1}{2} \leq x < k + 1$$

De même :

$$\ell \leq y < \ell + \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \ell + \frac{1}{2} \leq y < \ell + 1$$

Ceci nous amène à distinguer quatre cas (dans chacun des différents cas, nous serons en mesure d'explicitier les parties entières de $x + y$, $2x$ et $2y$).

★ **Premier cas :** $x \in \left[k, k + \frac{1}{2} \right[$ et $y \in \left[\ell, \ell + \frac{1}{2} \right[$

On a :

$$k + \ell \leq x + y < k + \ell + 1, \quad 2k \leq 2x < 2k + 1 \quad \text{et} \quad 2\ell \leq 2y < 2\ell + 1$$

Par définition de la partie entière d'un nombre réel, on a donc :

$$\lfloor x + y \rfloor = k + \ell, \quad \lfloor 2x \rfloor = 2k \quad \text{et} \quad \lfloor 2y \rfloor = 2\ell$$

On a donc ici l'égalité $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

★ **Deuxième cas :** $x \in \left[k, k + \frac{1}{2} \right[$ et $y \in \left[\ell + \frac{1}{2}, \ell + 1 \right[$

On a $2\ell + 1 \leq 2y < 2\ell + 2$ donc $\lfloor 2y \rfloor = 2\ell + 1$ donc $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor = 2k + 2\ell + 1$.

De plus :

$$x + y \leq k + \ell + \frac{3}{2} \quad \text{donc} \quad \lfloor x + y \rfloor \leq \left\lfloor k + \ell + \frac{3}{2} \right\rfloor = k + \ell + 1$$

par croissance de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor &= k + \ell + \lfloor x + y \rfloor \leq 2k + 2\ell + 1 \\ &= \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \end{aligned}$$

★ **Troisième cas :** $x \in \left[k + \frac{1}{2}, k + 1 \right[$ et $y \in \left[\ell, \ell + \frac{1}{2} \right[$

Comme x et y jouent des rôles symétriques dans l'inégalité, ce cas est analogue au second.

★ **Quatrième cas :** $x \in \left[k + \frac{1}{2}, k + 1 \right[$ et $y \in \left[\ell + \frac{1}{2}, \ell + 1 \right[$

On a ici :

$$k + \ell + 1 \leq x + y < k + \ell + 2, \quad 2k + 1 \leq 2x < 2k + 2$$

et $2\ell + 1 \leq 2y < 2\ell + 2$. On en déduit que :

$$\lfloor x + y \rfloor = k + \ell + 1, \quad \lfloor 2x \rfloor = 2k + 1 \quad \text{et} \quad \lfloor 2y \rfloor = 2\ell + 1$$

On constate à nouveau que l'inégalité est vérifiée.

Finalement :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor}$$

Exercice 13

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application, on a :

$$x \in f^{-1}(\{0\}) \iff f(x) \in \{0\} \iff f(x) = 0 \iff x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$$

Ainsi :

$$\boxed{f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{Z}}$$

Remarque : $f^{-1}(\{0\})$ est l'ensemble des antécédents de 0 par l'application f dans $\mathbb{R}$.

3. On veut montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = f(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x+1) = f(x) \iff x+1 - \lfloor x+1 \rfloor = x - \lfloor x \rfloor \iff \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

Comme $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, on a :

$$\lfloor x \rfloor + 1 \leq x + 1 < \lfloor x \rfloor + 2$$

Par définition de la partie entière, on a $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. Ainsi, $f(x+1) = f(x)$. Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est 1-périodique}}$$

4. Comme f est 1-périodique sur $\mathbb{R}$, on a $f(\mathbb{R}) = f([0, 1[)$. Or $f|_{[0, 1[} = \text{Id}_{[0, 1[}$ donc $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$. Ainsi :

$$\boxed{\sup(f(\mathbb{R})) = \sup([0, 1]) = 1}$$

Exercice 14

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m \iff m \leq \sqrt{k} < m+1 \iff m^2 \leq k < (m+1)^2$$

par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\boxed{\left\{ k \in \mathbb{N} \mid \lfloor \sqrt{k} \rfloor = m \right\} = \llbracket m^2, (m+1)^2 - 1 \rrbracket}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor = \sum_{p=0}^n \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor \\
 &= \sum_{p=0}^n \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} p \\
 &= \sum_{p=0}^n p((p+1)^2 - p^2) \\
 &= \sum_{p=0}^n (2p^2 + p) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$S_n = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'expression conjuguée, on a :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

Or $n+1 > n \geq 0$ donc $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ (par croissance stricte de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$) donc :

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n} > 0$$

La fonction inverse décroît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$. On procède de la même manière pour obtenir la deuxième inégalité. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

Posons $S = \sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}}$. On somme les inégalités précédentes sur les entiers $k \in \llbracket 2, 10^4 \rrbracket$:

$$\sum_{k=2}^{10^4} (2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}) < S - 1 < \sum_{k=2}^{10^4} (2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}),$$

i.e. (les sommes étant télescopiques) :

$$2\sqrt{10001} - 2\sqrt{2} < S - 1 < 2\sqrt{10^4} - 2 = 198$$

Ainsi (en utilisant la minoration $10001 > 10^4$) :

$$2 \times 100 + 1 - 2\sqrt{2} < S < 199$$

Comme $2\sqrt{2} < 3$ (car $2^2 \times 2 < 9$ et par croissance stricte de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$), on a la minoration :

$$201 - 2\sqrt{2} > 198 \quad \text{et donc} \quad 198 < S < 199$$

On peut donc conclure que :

$$\lfloor S \rfloor = 198$$

Exercice 16

2. On propose deux méthodes.

★ **Méthode 1** : en introduisant de la périodicité

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor \end{cases}$$

On veut démontrer que f est la fonction nulle (sur $\mathbb{R}$).

La fonction f est 1-périodique car, pour tout nombre réel x , on a (puisque p est un entier) :

$$\begin{aligned}
 f(x+1) &= \left\lfloor \frac{\lfloor p(x+1) \rfloor}{p} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor + p}{p} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 \\
 &= \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} + 1 \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 \\
 &= \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

On en déduit que f est la fonction nulle si et seulement si :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) = 0$$

Soit $x \in [0, 1[$. On a $\lfloor x \rfloor = 0$. De plus, $0 \leq px < p$ donc $0 \leq \lfloor px \rfloor \leq p - 1$ (puisque $\lfloor px \rfloor$ est un entier) puis, en divisant par $p > 0$,

$$0 \leq \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \leq 1 - \frac{1}{p} < 1$$

Ainsi, $\left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor = 0$. On peut donc conclure que $f(x) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

★ **Méthode 2 :** en utilisant les inégalités liées à la partie entière

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $\lfloor px \rfloor \leq px$ puis $\frac{\lfloor px \rfloor}{p} \leq x$ car $p > 0$. Par croissance de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$, on obtient l'inégalité :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor$$

Ensuite, on a $\lfloor x \rfloor \leq x$ donc, en multipliant par $p \geq 0$, il vient :

$$p\lfloor x \rfloor \leq px \quad \text{puis} \quad \lfloor p\lfloor x \rfloor \rfloor \leq \lfloor px \rfloor$$

par croissance de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$. Comme $p\lfloor x \rfloor$ est un entier relatif (puisque $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$), on a $\lfloor p\lfloor x \rfloor \rfloor = p\lfloor x \rfloor$ et la dernière inégalité se réécrit :

$$p\lfloor x \rfloor \leq \lfloor px \rfloor$$

En divisant par $p > 0$, il vient :

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor px \rfloor}{p}$$

On utilise encore la croissance de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$:

$$\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor$$

Or $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor$ car $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$. On a donc l'inégalité :

$$\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor$$

On en déduit que $\left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Finalement :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

3. On peut (par exemple) remarquer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \end{cases}$ est 1-périodique (il suffit de l'écrire). Ainsi, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq 1$$

revient à montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) \leq 1$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas.

★ **Premier cas :** $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$

On a $\lfloor x \rfloor = 0$ et, comme $2x \in [0, 1[$, on a aussi $\lfloor 2x \rfloor = 0$. Ainsi, $f(x) = 0$.

★ **Deuxième cas :** $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$

Ici, on a toujours $\lfloor x \rfloor = 0$ mais $1 \leq 2x < 2$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 1$. Ainsi, $f(x) = 1 \leq 1$.

Dans les deux cas, $f(x) \leq 1$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1}$$

Exercice 17 On utilisera l'identité suivante, démontrée dans l'exercice 12 :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lfloor t + 1 \rfloor = \lfloor t \rfloor$$

Une récurrence immédiate nous donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor t + n \rfloor = \lfloor t \rfloor + n$$

De plus, $\lfloor t - 1 \rfloor = \lfloor t \rfloor - 1$ car, d'après la première identité :

$$\lfloor t \rfloor = \lfloor (t - 1) + 1 \rfloor = \lfloor t - 1 \rfloor + 1$$

Ainsi, on a aussi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor t + n \rfloor = \lfloor t \rfloor + n$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor \iff \lfloor 2x \rfloor - 1 = \lfloor x \rfloor + 1 \iff \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + 2$$

Posons $k = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$. On distingue deux cas.

★ **Premier cas :** $x \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right[$

Alors $2k \leq 2x < 2k + 1$ et donc $\lfloor 2x \rfloor = 2k$. Ainsi :

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + 2 \iff 2k = k + 2 \iff k = 2$$

★ **Deuxième cas :** $x \in \left[k + \frac{1}{2}, k + 1 \right[$

On a $2k + 1 \leq 2x < 2k + 2$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 2k + 1$ donc :

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + 2 \iff 2k + 1 = k + 2 \iff k = 1$$

Donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \left[\frac{3}{2}, 2 \right[\cup \left[2, \frac{5}{2} \right[= \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right[}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lfloor x + 3 \rfloor = \lfloor x - 1 \rfloor \iff \lfloor x \rfloor + 3 = \lfloor x \rfloor - 1 \iff 3 = -1,$$

ce qui est absurde. Donc :

$$\boxed{\text{l'équation n'admet pas de solution dans } \mathbb{R}}$$

Exercice 18

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la partie entière, on a :

$$\begin{aligned} \lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \rfloor &= n^2 + n \\ \iff n^2 + n &\leq \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} < n^2 + n + 1 \\ \iff (n^2 + n)^2 &\leq n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 < (n^2 + n + 1)^2 \quad (1) \end{aligned}$$

par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$. Or :

$$(n^2 + n)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2 \quad \text{et} \quad (n^2 + n + 1)^2 = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$$

On remarque donc que les inégalités (1) sont satisfaites. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \rfloor = n^2 + n}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors (on utilise l'injectivité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ à la deuxième équivalence) :

$$\begin{aligned} n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 &\text{ est le carré d'un entier} \\ \iff \exists k \in \mathbb{N}, \quad n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 &= k^2 \\ \iff \exists k \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} &= k \\ \iff \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \in \mathbb{N} \\ \iff \lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \rfloor &= \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \\ \iff \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} &= n^2 + n \end{aligned}$$

d'après la question 1. En utilisant l'injectivité de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, il vient :

$$\begin{aligned} \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} &= n^2 + n \iff n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 = (n^2 + n)^2 \\ \iff n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 &= n^4 + 2n^3 + n^2 \\ \iff n^2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Il n'existe pas d'entiers naturels non nuls n tels que $n^2 = -\frac{1}{2}$ (en effet, $n^2 \geq 0$ tandis que $-\frac{1}{2} < 0$) donc :

$$\boxed{\text{il n'existe pas d'entier } n \in \mathbb{N}^* \text{ tels } n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 \text{ soit le carré d'un entier}}$$

Exercice 19

★ Montrons d'abord que $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ en raisonnant par l'absurde. Si $\sqrt{6}$ est un rationnel, alors il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$. On peut supposer que les entiers p et q sont premiers entre eux (*i.e.* que la fraction p/q est irréductible). On en déduit que $p^2 = 6q^2$ et donc p^2 est pair. On sait alors que cela implique que p est pair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. En injectant la valeur de p dans l'égalité $p^2 = 6q^2$, on obtient $2p^2 = 3q^2$. Par conséquent, q^2 et q sont pairs : il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $q = 2\ell$. La fraction $\frac{p}{q} = \frac{k}{\ell}$ n'est finalement pas irréductible, ce qui est absurde. Ainsi, $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

★ Supposons que $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est un rationnel. Alors $\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, d'où l'on tire que $\sqrt{6} = \frac{\alpha^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}}$$

Exercice 20

1. La fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ comme produit de fonctions qui le sont et, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + e^{-x} \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-x} \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{x^\ell}{\ell!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) \\ &= -e^{-x} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

On a donc $g'(0) = 0$ et, pour tout $x \in]0, 1]$, on a $g'(x) < 0$. Par conséquent :

la fonction g est strictement décroissante sur $[0, 1]$

2. La stricte décroissance de g sur $[0, 1]$ entraîne que $g(0) > g(1)$. Or :

$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad g(1) = e^{-1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

On en tire que :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e$$

3. La fonction h est dérivable sur $[0, 1]$ comme produit de fonctions qui le sont et, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$h'(x) = g'(x) - e^{-x} \frac{x^n}{n!} + e^{-x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

d'après la question 1. On a $h'(0) = 0$ et, pour tout $x \in]0, 1]$, on a $h'(x) > 0$. On en déduit que :

la fonction h est strictement croissante sur $[0, 1]$

4. Comme h est strictement croissante sur $[0, 1]$, on a $h(0) < h(1)$. Or :

$$h(0) = 1 \quad \text{et} \quad h(1) = e^{-1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \right)$$

donc :

$$e < \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) + \frac{1}{n!}$$

5. D'après les questions 2. et 4., on a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) + \frac{1}{n!}$$

En multipliant par $n! > 0$, on obtient, en posant $\alpha_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$,

$$n! \alpha_n < \frac{p \times n!}{q} < n! \alpha_n + 1$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\frac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$ (car $k!$ divise $n!$). On en déduit que α_n est un entier. Si $q \leq n$, alors q divise $n!$, ce qui implique que $\frac{p \times n!}{q}$ est un entier ; celui-ci est strictement compris entre les deux entiers successifs α_n et $\alpha_n + 1$, ce qui n'est pas possible. On peut donc conclure que :

$$q > n$$

6. S'il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $e = \frac{p}{q}$, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad q > n$$

d'après le raisonnement précédent. Ceci est absurde. On peut donc conclure que :

e n'est pas un rationnel