Nombres réels

(quelques corrigés)

Exercice 7

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons :
$$\mathscr{A}_x = \{|x-a| \mid a \in A\}$$
Il est clair que $\mathscr{A}_x$ est une partie de $\mathbb{R}$.
   - ⋆ Cette partie est non vide puisque A est non vide (en effet, si a est un élément de A, alors $|x-a|$ appartient à $\mathscr{A}_x$).
   - ⋆ De plus, $\mathscr{A}_x$ est minorée par 0 car :
$$\forall a \in A, \qquad |x-a| \geqslant 0$$

   D'après la propriété de la borne inférieure, l'ensemble $\mathscr{A}_x$ admet une borne inférieure. Ainsi :
$$\boxed{\text{pour tout } x \in A, \text{ la quantité } d(x,A) \text{ est bien définie}}$$

2. Soit $x \in A$. On remarque que (en choisissant $a = x \in A$), le nombre $|x-x| = 0$ appartient à $\mathscr{A}_x$ (introduit à la question précédente). Par ailleurs, 0 minore $\mathscr{A}_x$ (vu à la question précédente). Donc $\mathscr{A}_x$ possède un minimum qui vaut 0. Ceci implique que $\inf(\mathscr{A}_x) = \min(\mathscr{A}_x) = 0$. Autrement dit, $d(x,A) = 0$. Finalement :
$$\boxed{\forall x \in A, \qquad d(x,A) = 0}$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in A$. Alors $d(x,A) \leqslant |x-a|$ (puisque $|x-a| \in \mathscr{A}_x$ et car $d(x,A)$ est un minorant de $\mathscr{A}_x$). Ensuite, d'après l'inégalité triangulaire :
$$d(x,A) \leqslant |(x-y)+(y-a)| \leqslant |x-y| + |y-a|$$
On en déduit que :
$$d(x,A) - |x-y| \leqslant |y-a|$$
On a donc montré que :
$$\forall a \in A, \qquad d(x,A) - |x-y| \leqslant |y-a|$$
Ainsi, $d(x,A) - |x-y|$ minore l'ensemble $\mathscr{A}_y$. Comme $d(y,A) = \inf(\mathscr{A}_y)$ est le plus grand majorant de $\mathscr{A}_y$, on a l'inégalité :
$$d(x,A) - |x-y| \leqslant d(y,A) \qquad \textit{i.e.} \qquad d(x,A) - d(y,A) \leqslant |x-y|$$
En échangeant les rôles de x et y, on a aussi $d(y,A) - d(x,A) \leqslant |y-x| = |x-y|$. On a donc bien :
$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant |x-y|}$$

Exercice 10

3. ⋆ Commençons par justifier que $A+B$ admet une borne supérieure. Tout d'abord, $A+B$ est une partie de $\mathbb{R}$ (puisque A et B sont des parties de $\mathbb{R}$). Par ailleurs, $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$ donc il existe $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$. Alors $a_0 + b_0 \in A+B$ et donc $A+B$ est non vide.

   Montrons maintenant que $A+B$ est majorée. Soit $c \in A+B$. Il existe $(a,b) \in A \times B$ tel que $c = a+b$ (par définition de $A+B$). Or $\sup(A)$ majore A et $a \in A$ donc $a \leqslant \sup(A)$. De la même manière, $b \leqslant \sup(B)$. Par conséquent, $c \leqslant \sup(A) + \sup(B)$. On a donc montré que :
$$\forall c \in A+B, \qquad c \leqslant \sup(A) + \sup(B)$$
   Ainsi, l'ensemble $A+B$ est majoré (par $\sup(A+B)$). La propriété de la borne supérieure assure donc l'existence de la borne supérieure de $A+B$. Par ailleurs, comme $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$, on a l'inégalité :
$$\sup(A+B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$$

   ⋆ Il reste à montrer l'inégalité inverse, à savoir que :
$$\sup(A) + \sup(B) \leqslant \sup(A+B)$$
   Pour tous $a \in A$ et $b \in B$, comme $a+b \in A+B$, on a $a+b \leqslant \sup(A+B)$. Fixons $b \in B$. Alors :
$$\forall a \in A, \qquad a \leqslant \sup(A+B) - b$$
   Ainsi, $\sup(A+B) - b$ est un majorant de A. Or $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A donc $\sup(A) \leqslant \sup(A+B) - b$. Ainsi :
$$\forall b \in B, \qquad \sup(A) \leqslant \sup(A+B) - b,$$

ce que l'on peut réécrire :

$$\forall b \in B, \qquad b \leqslant \sup(A+B) - \sup(A)$$

Donc $\sup(A+B)-\sup(A)$ majore B et comme $\sup(B)$ est le plus petit majorant de B, on a l'inégalité :

$$\sup(B) \leqslant \sup(A+B)-\sup(A) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sup(A)+\sup(B) \leqslant \sup(A+B)$$

Finalement :

$$\boxed{\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)}$$

4. Soit $(x,y) \in [a,b]^2$. On a $0 < a \leqslant x \leqslant b$ et $0 < \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{a}$. En multipliant les inégalités (tous les nombres mis en jeu sont positifs), on obtient :

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{b}{a}$$

Ainsi :

$$\forall x \in A, \qquad \frac{a}{b} \leqslant x \leqslant \frac{b}{a}$$

Par ailleurs, comme $a, b \in [a,b]$, on a $\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a} \in A$. Donc $\dfrac{a}{b} \in A$ et ce nombre minore A. On en déduit que :

$$\boxed{\text{A admet un minimum, et donc une borne inférieure, qui valent } \min(A) = \inf(A) = \frac{a}{b}}$$

De même :

$$\boxed{\text{A admet un maximum, et donc une borne supérieure, qui valent } \max(A) = \sup(A) = \frac{b}{a}}$$

Exercice 14

2. *On propose deux méthodes.*

⋆ **Méthode 1 :** *en introduisant de la périodicité*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\lfloor \dfrac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$$

On veut démontrer que f est la fonction nulle (sur $\mathbb{R}$).

La fonction f est 1-périodique car, pour tout nombre réel x, on a (puisque p est un entier) :

$$\begin{aligned} f(x+1) = \left\lfloor \frac{\lfloor px + p \rfloor}{p} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor &= \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor + p}{p} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} + 1 \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On en déduit que f est la fonction nulle si et seulement si :

$$\forall x \in [0,1[, \qquad f(x) = 0$$

Soit $x \in [0,1[$. On a $\lfloor x \rfloor = 0$. De plus, $0 \leqslant px < p$ donc $0 \leqslant \lfloor px \rfloor \leqslant p-1$ (puisque $\lfloor px \rfloor$ est un entier) puis, en divisant par $p > 0$,

$$0 \leqslant \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \leqslant 1 - \frac{1}{p} < 1$$

Ainsi, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor = 0$. On peut donc conclure que $f(x) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

⋆ **Méthode 2 :** *en utilisant les inégalités liées à la partie entière*

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $\lfloor px \rfloor \leqslant px$ puis $\dfrac{\lfloor px \rfloor}{p} \leqslant x$ car $p > 0$. Par croissance de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$, on obtient l'inégalité :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor$$

Ensuite, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ donc, en multipliant par $p \geqslant 0$, il vient :

$$p\lfloor x \rfloor \leqslant px \qquad \text{puis} \qquad \big\lfloor p\lfloor x \rfloor \big\rfloor \leqslant \lfloor px \rfloor$$

par croissance de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$. Comme $p\lfloor x \rfloor$ est un entier relatif (puisque $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$), on a $\big\lfloor p\lfloor x \rfloor \big\rfloor = p\lfloor x \rfloor$ et la dernière inégalité se réécrit :

$$p\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor px \rfloor$$

En divisant par $p > 0$, il vient :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant \frac{\lfloor px \rfloor}{p}$$

On utilise encore la croissance de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$:

$$\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor$$

Or $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor$ car $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$. On a donc l'inégalité :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor$$

On en déduit que $\left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Finalement :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor}$$

3. On peut (par exemple) remarquer que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \end{array} \right.$ est 1-périodique (il suffit de l'écrire). Ainsi, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \leqslant 1$$

revient à montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \qquad f(x) \leqslant 1$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas.

$\star$ **Premier cas :** $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$

On a $\lfloor x \rfloor = 0$ et, comme $2x \in [0, 1[$, on a aussi $\lfloor 2x \rfloor = 0$. Ainsi, $f(x) = 0$.

$\star$ **Deuxième cas :** $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$

Ici, on a toujours $\lfloor x \rfloor = 0$ mais $1 \leqslant 2x < 1$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 1$. Ainsi, $f(x) = 1 \leqslant 1$.

Dans les deux cas, $f(x) \leqslant 1$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leqslant 1}$$

Exercice 16

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la partie entière, on a :

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \right\rfloor = n^2 + n \\ &\iff n^2 + n \leqslant \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} < n^2 + n + 1 \\ &\iff (n^2 + n)^2 \leqslant n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 < (n^2 + n + 1)^2 \quad (1) \end{aligned}$$

par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$. Or :

$$(n^2 + n)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2 \qquad \text{et} \qquad (n^2 + n + 1)^2 = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$$

On remarque donc que les inégalités (1) sont satisfaites. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left\lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \right\rfloor = n^2 + n}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors (on utilise l'injectivité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ à la deuxième équivalence) :

$$\begin{aligned} &n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 \text{ est le carré d'un entier} \\ &\iff \exists\, k \in \mathbb{N},\ n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 = k^2 \\ &\iff \exists\, k \in \mathbb{N},\ \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} = k \\ &\iff \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \in \mathbb{N} \\ &\iff \left\lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \right\rfloor = \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \\ &\iff \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} = n^2 + n \end{aligned}$$

d'après la question 1. En utilisant l'injectivité de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, il vient :

$$\begin{aligned} \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} = n^2 + n &\iff n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 = (n^2 + n)^2 \\ &\iff n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 = n^4 + 2n^3 + n^2 \\ &\iff n^2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Il n'existe pas d'entiers naturels non nuls n tels que $n^2 = -\frac{1}{2}$ (en effet, $n^2 \geqslant 0$ tandis que $-\frac{1}{2} < 0$) donc :

$$\boxed{\text{il n'existe pas d'entier } n \in \mathbb{N}^* \text{ tels } n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 \text{ soit le carré d'un entier}}$$