

NOMBRES RÉELS

1 Manipulation d'inégalités

Exercice 1 (racine carrée) 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Dans quels cas a-t-on égalité ?

2. En déduire que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| \leq \sqrt{|x-y|}$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.

Exercice 2 Proposer un encadrement des quantités suivantes :

$$1. \lambda = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + \sqrt{x+1} + 1} \text{ pour } x \in [-1, 1] \quad 2. \beta = \frac{-x + y^2 + 1}{x^2 + y^2 - y} \text{ pour } x, y \in [1, 2]$$

2 Équations, inéquations

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \ln(|x+1|) - \ln(|2x+1|) = 0 & 2. |2x+3| - x - 2 = |2x-1| \\ 3. |2x-3| < |3x+5| & 4. \ln(|4x-1|) - \ln(|x+3|) < 0 \\ 5. \sqrt{(3x+5)^2} = x+1 & \end{array}$$

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \sqrt{x+2} = x-4 & 2. \sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5} \\ 3. \sqrt{x^2 - x - 2} = 3x+2 & 4. \sqrt{x+1} < 2x-3 \\ 5. \sqrt{x^2 - x - 20} \geq x & 6. \sqrt{x+1} \geq \sqrt{4x-1} \\ 7. \sqrt{x-1} - \sqrt{2x^2+1} > 0 & \end{array}$$

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. e^{\frac{x-1}{x+2}} < e^2 & 2. \frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e \\ 3. \ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln(2x+11) & 4. \ln(2x+1) - \ln(x-3) \leq 1 \\ 5. \frac{e^x + 1}{e^{-x} - e} > 0 & 6. \ln(x^2 - e^2) \leq 2 \\ 7. (e^x - 1)(e^{-x} + 1) < 0 & \end{array}$$

3 Bornes supérieure et inférieure

Exercice 6 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

- Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction majorée. Justifier que l'ensemble $f(I)$ admet une borne supérieure.
Dans la suite, on pose $N(f) = \sup(f(I))$.
- Soient $f, g \in \mathbb{R}^I$ deux fonctions majorées sur I . Montrer que :

$$N(f+g) \leq N(f) + N(g)$$

et justifier que l'inégalité peut être stricte.

Exercice 7 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Justifier, pour tout nombre réel x , l'existence du nombre réel :

$$d(x, A) = \inf \{ |x-a| \mid a \in A \},$$

appelé *distance* de x à A .

- Soit $x \in A$. Calculer $d(x, A)$.
- Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$$

Exercice 8 1. Soit $f \in [0, 1]^{[0, 1]}$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un *point fixe*, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$. On pose :

$$T = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x\}$$

- (a) Montrer que T possède une borne inférieure. *On la notera t .*
 - (b) Montrer que $f(t)$ minore T .
 - (c) Montrer que $f(T) \subset T$.
 - (d) En déduire que $f(t) = t$.
2. Ce résultat est-il toujours vrai pour une fonction croissante de $[0, 1[$ dans lui-même ?

Exercice 9 1. On considère l'ensemble $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que A est une bornée de $\mathbb{R}$ et déterminer $\inf(A)$ et $\sup(A)$. L'ensemble A admet-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?

2. Même question avec les ensembles :

- (a) $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}_+, x = \frac{y-1}{y+1} \right\}$;
- (b) $C = \left\{ 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}^* \right\}$;
- (c) $D = \left\{ \frac{p+2}{p+1} + \frac{q-1}{q+1} \mid p, q \in \mathbb{N} \right\}$.

Exercice 10 1. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $B \subset A$. Montrer que :

$$\inf(A) \leq \inf(B) \leq \sup(B) \leq \sup(A)$$

2. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad a < b$$

Que dire des quantités $\inf(B)$ et $\sup(A)$?

3. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose :

$$A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$$

Démontrer que $A + B$ admet une borne supérieure telle que :

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$. Étudier les éventuelles bornes supérieure et inférieure de l'ensemble :

$$A = \left\{ \frac{x}{y} \mid (x, y) \in [a, b]^2 \right\}$$

5. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose :

$$B = \{|x - y| \mid (x, y) \in A^2\}$$

- (a) Démontrer que B est non vide et bornée.
- (b) Montrer que B admet un plus petit élément, dont on donnera la valeur.
- (c) Démontrer que B admet une borne supérieure telle que :

$$\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$$

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Exprimer la somme $\sum_{k=1}^n (1 - a_k)^2$ en fonction de $\sum_{k=1}^n a_k$ et $\sum_{k=1}^n a_k^2$.

2. On considère l'ensemble :

$$E_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, x = \sum_{k=1}^n a_k \text{ et } x = \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\}$$

L'ensemble E_n est-il majoré ? minoré ? Possède-t-il un maximum ? un minimum ?

4 Partie entière

Exercice 12 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

2. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

Exercice 13 On considère l'application suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \lfloor x \rfloor \end{cases}$$

- 1. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-3, 3]$.
- 2. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
- 3. Démontrer que la fonction f est 1-périodique.
- 4. Démontrer que $\sup(f(\mathbb{R})) = 1$.

Exercice 14 1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer les entiers naturels k tels que $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n^2+2n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Exercice 15 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

En déduire $\left\lfloor \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor$.

Exercice 16 1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1$$

Exercice 17 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1. \lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor \quad 2. \lfloor x + 3 \rfloor = \lfloor x - 1 \rfloor$$

Exercice 18 1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \rfloor = n^2 + n$$

2. Déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$ est le carré d'un entier.

5 Rationnels

Exercice 19 Le nombre $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ?

Exercice 20 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On considère les fonctions :

$$g : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \end{cases} \quad \text{et} \quad h : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) + e^{-x} \frac{x^n}{n!} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

2. En déduire que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e$.

3. Montrer que h est strictement croissante sur $[0, 1]$.

4. En déduire que $e < \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) + \frac{1}{n!}$.

5. On suppose que e est un nombre rationnel. Il existe donc des entiers naturels p et q (q étant non nul) tels que $e = \frac{p}{q}$. Montrer que $q > n$.

6. Conclure que $e \notin \mathbb{Q}$.