

NOMBRES COMPLEXES

(corrigés)

Exercice 1

1. ★ On a $z_1 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 = -2 - 2i\sqrt{3}$.

★ On utilise la conjugaison :

$$z_2 = \frac{(1-4i)(1-5i)}{|1+5i|^2} = \frac{-19-9i}{26}$$

★ On utilise la conjugaison :

$$z_3 = \frac{(1+i)^2}{|1-i|^2} = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

★ En posant $w = \frac{1-2i}{1+5i}$, on a $z = w + \bar{w} = 2\operatorname{Re}(w)$. Or :

$$w = \frac{(1-2i)(1-5i)}{|1+5i|^2} = \frac{-9-7i}{26}$$

$$\text{donc } z_4 = -\frac{9}{13}.$$

★ On a :

$$z_5 = 8 + 3 \times 4i + 3 \times 2 \times i^2 + i^3 = 2 + 11i$$

★ On a :

$$z_6 = \frac{-4(1-i\sqrt{5})}{|1+i\sqrt{5}|^2} = \frac{-4+4i\sqrt{5}}{6} = -\frac{2}{3} + i\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

★ On a $z_7 = z_3^2 = i^2 = -1$.

★ Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$z_8 = a^3 + 3ia^2b - 3ab^2 - ib^3 + a^3 - 3ia^2b - 3ab^2 + ib^3 = 2a^3 - 6ab^2$$

2. Soit $z \in \mathbb{Z}$. On a :

$$iz = i(\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)) = -\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Re}(z)$$

et :

$$z^2 = (\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z))^2 = \operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im}(z)^2 + 2i\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)$$

donc :

$$\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z), \quad \operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z)$$

et :

$$\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im}(z)^2, \quad \operatorname{Im}(z^2) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)$$

Exercice 2

1. $z = 7e^{i0}$

2. $z = 3e^{i\pi}$

3. $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

4. $z = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

5. $z = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

6. On a $\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $z = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

7. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. On a :

$$z = \frac{1}{\cos(\alpha)}(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) = \frac{1}{\cos(\alpha)}e^{i\alpha}$$

On distingue ensuite deux cas.

★ $\alpha \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$

On a $\cos(\alpha) > 0$ donc $\frac{1}{\cos(\alpha)} > 0$. Ainsi, $z = \frac{1}{\cos(\alpha)}e^{i\alpha}$ est la forme trigonométrique du nombre complexe z .

★ $\alpha \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[$

On a $\cos(\alpha) < 0$ donc $\frac{1}{\cos(\alpha)} < 0$. Ainsi, $z = -\frac{1}{\cos(\alpha)}e^{i(\alpha+\pi)}$ est la forme trigonométrique du nombre complexe z .

8. $z = 4e^{i\frac{3\pi}{2}}$

9. On utilise la technique de l'angle moitié et on obtient :

$$\begin{aligned} z &= e^{i\frac{\pi}{8}} \left(e^{-i\frac{\pi}{8}} - e^{i\frac{\pi}{8}} \right) = -2i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\frac{\pi}{8}} \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

Comme $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, la forme trigonométrique de z est $z = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-i\frac{3\pi}{8}}$.

10. On utilise la technique de l'angle moitié :

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(e^{-i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{12}} \right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Ceci est la forme trigonométrique de z car $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$.

11. Tout d'abord, si $\alpha \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, alors $z = 0$ et donc z n'admet pas de forme trigonométrique. Soit maintenant $z \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$. On utilise la technique de l'angle moitié et on obtient $z = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$. On distingue ensuite deux cas.

★ **Premier cas :** $\alpha \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi[$

On a ici $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ donc $z = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$ est la forme trigonométrique de z .

★ **Deuxième cas :** $\alpha \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi[$

Comme $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$, la forme trigonométrique de z est :

$$z = -2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)}$$

12. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $\alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}$ (i.e. si $\alpha \equiv \beta [2\pi]$), alors $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$ et donc $z = 0$. Dans ce cas, z n'admet pas de forme trigonométrique. On suppose maintenant que $\alpha - \beta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On utilise la technique de l'angle moitié et on obtient :

$$z = 2i \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha + \beta}{2}} = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha + \beta + \pi}{2}}$$

On distingue ensuite deux cas.

★ **Premier cas :** $\frac{\alpha - \beta}{2} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, (2k + 1)\pi[$

On a $\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) > 0$ donc la forme trigonométrique de z est :

$$z = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha + \beta + \pi}{2}}$$

★ **Deuxième cas :** $\frac{\alpha - \beta}{2} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}](2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi[$

Ici, $\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) < 0$ donc la forme trigonométrique de z est :

$$z = -2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha + \beta + 3\pi}{2}}$$

13. On a $1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $1 + i\sqrt{3} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $z = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$.

14. On a $\sqrt{3} + i = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $z = \frac{1}{16} e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

15. On élève z au carré :

$$\begin{aligned} z^2 &= (2 + \sqrt{2}) - (2 - \sqrt{2}) + 2i\sqrt{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} \\ &= 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} \\ &= 4 e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(2 e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\left(z - 2 e^{i\frac{\pi}{8}}\right) \left(z + 2 e^{i\frac{\pi}{8}}\right) = 0 \quad \text{et donc} \quad z = -2 e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ ou } z = 2 e^{i\frac{\pi}{8}}$$

Or $\operatorname{Re}\left(\pm 2 e^{i\frac{\pi}{8}}\right) = \pm 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\operatorname{Re}(z) = \sqrt{2} + \sqrt{2} > 0$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ donc $z = 2 e^{i\frac{\pi}{8}}$.

16. Soit $(\alpha, \beta) \in]0, 2\pi[\times]0, \frac{\pi}{2}[$. On a :

$$i e^{i\beta} + 1 = e^{i\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)} + 1 = 2 \cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Comme $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$. En particulier, le nombre complexe z est bien défini (le dénominateur étant en particulier non nul). De plus :

$$e^{i\alpha} - 1 = 2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}} = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha + \pi}{2}}$$

Comme $\frac{\alpha}{2} \in]0, \pi[$, on a $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$. Finalement, $\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} > 0$ donc la forme trigonométrique de z est :

$$z = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\alpha + \pi}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} e^{i\frac{\alpha - \beta + \pi}{4}}$$

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{donc} \quad (1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

On a ainsi obtenu la forme trigonométrique de $(1 + i)^n$. Ainsi :

$$(1 + i)^n \in \mathbb{R} \iff \text{Arg}((1 + i)^n) \equiv 0 [\pi] \iff \frac{n\pi}{4} \equiv 0 [\pi] \\ \iff n \equiv 0 [4]$$

Ainsi :

$$(1 + i)^n \in \mathbb{R} \text{ si et seulement si } n \text{ est un multiple de } 4$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On procède de la même manière : on a $\sqrt{3} + i = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc :

$$(\sqrt{3} + i)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

Ainsi :

$$(\sqrt{3} + i)^n \in i\mathbb{R} \iff \text{Arg}((\sqrt{3} + i)^n) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \frac{n\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ \iff n \equiv 3 [6]$$

Donc :

$$(\sqrt{3} + i)^n \in i\mathbb{R} \text{ si et seulement si il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 6k + 3$$

Exercice 4

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On distingue trois cas.

★ **Premier cas** : $k \equiv 0 [3]$

Il existe alors $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3\ell$. Alors $j^k = (j^3)^\ell = 1$ (car $j^3 = e^{2i\pi} = 1$) et, de la même manière, $j^{2k} = 1$. Ainsi, $1 + j^k + j^{2k} = 3$.

★ **Deuxième cas** : $k \equiv 1 [3]$

Il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3\ell + 1$. On a :

$$j^k = j^{3\ell} \times j \quad \text{et} \quad j^{2k} = j^{6\ell} \times j^2 = j^2$$

Ainsi, $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j + j^2 = 0$.

★ **Troisième cas** : $k \equiv 2 [3]$

De la même manière, on trouve que $1 + j^k + j^{2k} = 0$.

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 1 + j^k + j^{2k} = \begin{cases} 3 & \text{si } k \equiv 0 [3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$(1 + 1)^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^{2k},$$

i.e. :

$$(1 + 1)^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [1 + j^k + j^{2k}]$$

(b) On utilise la première question. Si k n'est pas un multiple de 3, alors le sommant de la somme précédente est nul. Il reste dans la somme les indices de la forme $k = 3\ell$ tels que $0 \leq \ell \leq n$, i.e. tels que $0 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Et, pour un tel

indice $k = 3\ell$, le sommant vaut $\binom{n}{3\ell} \times 3$. Ainsi :

$$(1 + 1)^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3\ell} \times 3$$

donc :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k} = \frac{2^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n}{3}$$

Exercice 5

1. On trouve que :

$$\text{l'ensemble des solutions de l'équation est } \{j, j^2\}, \text{ où } j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

2. D'après la formule de Moivre, on a :

$$j^3 = e^{2i\pi} = 1$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$ donc :

$$\text{les nombres complexes } z \text{ tels que } z^3 = 1 \text{ sont } 1, j \text{ et } j^2 = \bar{j}$$

3. On sait que $1 + j + j^2 = 0$ donc $1 + j = -j^2$ et :

$$z_1 = (-j^2)^7 = -j^{14} = -(j^3)^4 \times j^2 = -j^2 = 1 + j$$

De plus :

$$z_2 = 6 + j - 2j^2 = 6 + j + 2(1 + j) = 8 + 3j$$

Comme $j^9 = (j^3)^3 = 1$, on a :

$$z_3 = \frac{1}{1+j} = -\frac{1}{j^2} = -j^{-2} \times j^3 = -j$$

Enfin :

$$z_4 = \frac{1 - \bar{j}}{(1 - \bar{j})(1 - j)} = \frac{1 - j^2}{2 - (j + \bar{j})} = \frac{1 + (1 + j)}{3}$$

donc :

$$z_4 = \frac{2}{3} + \frac{j}{3}$$

4. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} (u + v)(u + jv)(u + j^2v) &= (u^2 + juv + uv + jv^2)(u + j^2v) \\ &= u^3 + j^3v^3 + (1 + j + j^2)u^2v + (1 + j + j^2)uv^2 \end{aligned}$$

Or $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$ donc :

$$(u + v)(u + jv)(u + j^2v) = u^3 + v^3$$

5. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{j, \bar{j}\}$. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1+z+z^2}\right) = 0 &\iff \frac{1}{1+z+z^2} \in \mathbb{R} \\ &\iff \overline{\left(\frac{1}{1+z+z^2}\right)} = \frac{1}{1+z+z^2} \\ &\iff \frac{1}{1+\bar{z}+\bar{z}^2} = \frac{1}{1+z+z^2} \\ &\iff 1+z+z^2 = 1+\bar{z}+\bar{z}^2 \\ &\iff z - \bar{z} + (z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 0 \\ &\iff (z - \bar{z})(1 + 2\operatorname{Re}(z)) = 0 \\ &\iff z = \bar{z} \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\mathbb{R} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{j, \bar{j}\} \mid \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} \right\}$$

Exercice 6

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $|a| = |b| = |c| = 1$ et $ac \neq -1$. Le nombre complexe z est alors bien défini (car on a aussi $b \neq 0$) et il suffit de vérifier que $\bar{z} = -z$ pour montrer que $z \in i\mathbb{R}$. En utilisant les propriétés (multiplicatives et additives) de la conjugaison, il vient :

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}\right)} = \frac{\overline{(c-b)(1+ab)}}{\overline{b(1+ac)}} = \frac{(\bar{c} - \bar{b})(1 + \bar{a}\bar{b})}{\bar{b}(1 + \bar{a}\bar{c})}$$

Or a, b et c sont de module 1 donc $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$ et $\bar{c} = \frac{1}{c}$. En remplaçant et en multipliant par abc au numérateur et au dénominateur, on obtient :

$$\bar{z} = \frac{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{ab}\right)}{\frac{1}{b}\left(1 + \frac{1}{ac}\right)} = \frac{\frac{b-c}{bc} \times \frac{ab+1}{ab}}{\frac{ac+1}{abc}} = \frac{(b-c)(ab+1)}{b(ac+1)} = -\frac{(c-b)(ab+1)}{b(ac+1)} = -z$$

Finalement :

$$z \text{ est un nombre complexe imaginaire pur}$$

2. Soient $z, u \in \mathbb{C}$ tels que $u \neq 1$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R} &\iff \overline{\left(\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}\right)} = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \\ &\iff \frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}} = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \\ &\iff (\bar{z} - \bar{u}z)(1 - u) = (z - u\bar{z})(1 - \bar{u}) \\ &\iff \bar{z} - \bar{z}u - \bar{u}z + |u|^2z = z - \bar{u}z - u\bar{z} + |u|^2\bar{z} \\ &\iff z - \bar{z} + (z - \bar{z})|u|^2 = 0 \\ &\iff (z - \bar{z})(1 - |u|^2) = 0 \\ &\iff z - \bar{z} = 0 \text{ ou } 1 - |u|^2 = 0 \quad (\text{intégrité de } \mathbb{C}) \\ &\iff z = \bar{z} \text{ ou } |u|^2 = 1 \\ &\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } |u| = 1 \end{aligned}$$

par injectivité de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ (et car $|u| \in \mathbb{R}_+$). Finalement :

$$\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R} \iff (u \in \mathbb{U} \text{ ou } z \in \mathbb{R})$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
 z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} &\iff \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = z + \frac{1}{z} \\
 &\iff \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} = z + \frac{1}{z} \\
 &\iff z - \bar{z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = 0 \\
 &\iff z - \bar{z} - \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} = 0 \\
 &\iff (z - \bar{z}) \left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0 \\
 &\iff z = \bar{z} \quad \text{ou} \quad |z| = 1
 \end{aligned}$$

en utilisant l'intégrité de $\mathbb{C}$ et l'injectivité de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ (et le fait que $|z| \in \mathbb{R}_+$). Ainsi :

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff (z \in \mathbb{U} \text{ ou } z \in \mathbb{R})$$

Exercice 7

1. Soit $z \in \mathbb{U}$. Par définition de $\mathbb{U}$, on a $|z| = 1$, i.e. $\sqrt{z\bar{z}} = 1$. Ainsi, $z\bar{z} = 1$. En particulier, $z \neq 0$ et on a $z = \frac{1}{\bar{z}}$. Finalement :

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad \bar{z} = \frac{1}{z}$$

2. Soit $z \in \mathbb{U}$. On a :

$$\begin{aligned}
 \varphi(z) &= (1 + iz)\overline{(1 + iz)} + (z + i)\overline{(z + i)} = (1 + iz)(1 - i\bar{z}) + (z + i)(\bar{z} - i) \\
 &= 1 - i\bar{z} + iz + |z|^2 + |z|^2 - iz + i\bar{z} + 1 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

car $z \in \mathbb{U}$. Ainsi :

$$\text{la fonction } \varphi \text{ est constante (égale à 4) sur } \mathbb{U}$$

3. Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Il existe $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Ainsi (on utilise la technique de l'angle moitié) :

$$1 - z = 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 - z} &= \frac{i}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} e^{-i\frac{\alpha}{2}} = \frac{i}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} + i \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - z}\right) = \frac{1}{2}$$

4. Soient $a, b, c \in \mathbb{U}$. On a alors $a = \frac{1}{\bar{a}}$, $b = \frac{1}{\bar{b}}$ et $c = \frac{1}{\bar{c}}$ donc :

$$\begin{aligned}
 |a + b + c| &= \left| \frac{1}{\bar{a}} + \frac{1}{\bar{b}} + \frac{1}{\bar{c}} \right| = \left| \overline{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right| \\
 &= \left| \frac{bc + ac + ab}{abc} \right| \\
 &= \frac{|ab + ac + bc|}{|a| |b| |c|} \\
 &= |ab + ac + bc|
 \end{aligned}$$

car $a, b, c \in \mathbb{U}$. Ainsi :

$$|a + b + c| = |ab + bc + ac|$$

5. Soient $z, z' \in \mathbb{U}$ tels que $zz' \neq -1$. On a $\bar{z} = \frac{1}{z}$ et $\bar{z}' = \frac{1}{z'}$ donc :

$$\overline{\left(\frac{z + z'}{1 + zz'}\right)} = \frac{\bar{z} + \bar{z}'}{1 + \bar{z}\bar{z}'} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}}{1 + \frac{1}{z} \times \frac{1}{z'}} = \frac{\frac{z + z'}{zz'}}{\frac{zz' + 1}{zz'}} = \frac{z + z'}{zz' + 1}$$

Ainsi :

$$\frac{z + z'}{1 + zz'} \in \mathbb{R}$$

Exercice 8

1. (a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$. On a :

$$\begin{aligned} |f(z)| = 1 &\iff \left| \frac{z+1}{z-2} \right| = 1 \\ &\iff \frac{|z+1|}{|z-2|} = 1 \\ &\iff |z+1| = |z-2| \\ &\iff |z+1|^2 = |z-2|^2 \end{aligned}$$

par injectivité de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ et car $|z+1|, |z-2| \in \mathbb{R}_+$. Or :

$$\begin{aligned} |z+1|^2 &= (z+1)\overline{(z+1)} = (z+1)(\bar{z}+1) \\ &= z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z) + 1 \end{aligned}$$

et, de la même manière, on obtient :

$$|z-2|^2 = |z|^2 - 4\operatorname{Re}(z) + 4$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |f(z)| = 1 &\iff |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z) + 1 = |z|^2 - 4\operatorname{Re}(z) + 4 \\ &\iff \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{2\} \mid |f(z)| = 1 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists y \in \mathbb{R}, z = \frac{1}{2} + iy \right\}$$

ou, si on préfère :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{2\} \mid |f(z)| = 1 \right\} = \left\{ \frac{1}{2} + iy \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f(z)) = 0 &\iff f(z) \in i\mathbb{R} \\ &\iff \overline{f(z)} = -f(z) \\ &\iff \overline{\left(\frac{z+1}{z-2} \right)} = -\frac{z+1}{z-2} \\ &\iff \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-2} = -\frac{z+1}{z-2} \\ &\iff (\bar{z}+1)(z-2) = -(z+1)(\bar{z}-2) \\ &\iff |z|^2 - 2\bar{z} + z - 2 = -|z|^2 + 2z - \bar{z} + 2 \\ &\iff 2|z|^2 - \underbrace{(z+\bar{z})}_{=2\operatorname{Re}(z)} - 4 = 0 \\ &\iff |z|^2 - \operatorname{Re}(z) - 2 = 0 \end{aligned}$$

En posant $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f(z)) = 0 &\iff x^2 + y^2 - x - 2 = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 - 2 = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Ainsi :

l'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$ privé du point 2

2. On procède comme à la question précédente.

Exercice 9

1. On raisonne par analyse synthèse.

★ **Analyse** : soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + \bar{z} = |z|$. On pose $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$. On a :

$$2x = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{i.e.} \quad 3x^2 = y^2$$

Comme $x = \frac{|z|}{2} \geq 0$, on a $|y| = x\sqrt{3}$. On a donc montré que, si $z = x + iy$ est un solution de l'équation, alors $x \geq 0$ et $y = \pm x\sqrt{3}$.

★ **Synthèse** : soient $x \in \mathbb{R}_+$ et posons $z = x \pm ix\sqrt{3}$. On a $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) = 2x$ et :

$$|z| = \sqrt{x^2 + 3x^2} = \sqrt{4x^2} = 2x = z + \bar{z}$$

Autrement dit, z est solution de l'équation.

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \{x \pm ix\sqrt{3} \mid x \in \mathbb{R}_+\}}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $|z+1| = |z|+1$ si et seulement si les nombres complexes z et 1 sont colinéaires de même sens (d'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$).

Donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \mathbb{R}_+}$$

Exercice 10

1. L'équation se réécrit $z^2 + (4-3i)z - 2-8i$. Le discriminant Δ de cette équation vaut :

$$\begin{aligned}\Delta &= (4-3i)^2 - 4(-2-8i) = 16 - 24i - 9 + 8 + 32i = 15 + 8i \\ &= (4+i)^2\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation sont } \frac{4-3i-(4+i)}{2} = -2i \text{ et } \frac{4-3i+(4+i)}{2} = 4-i}$$

2. Le discriminant Δ vaut :

$$\Delta = 25 - 4(4+10i) = 9 - 40i = (5-4i)^2$$

donc :

$$\boxed{\text{les solutions sont } \frac{5+(5-4i)}{2} = 5-2i \text{ et } \frac{5-(5-4i)}{2} = 2i}$$

3. traitée en classe

4. On trouve les racines $\frac{1}{2} - i$ et $\frac{7}{2} + i$.

5. On trouve les racines $-3 + \frac{i}{2}$ et $-1 + 2i$.

Exercice 12

On note $\mathcal{S}$ chaque ensemble de solutions.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned}z^3 = 1 &\iff z^3 - 1 = 0 \iff (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \\ &\iff z = 1 \text{ ou } z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

2. On remarque que 0 n'est pas solution de l'équation. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $z = r e^{i\theta}$. De plus, $16i = 16 e^{i\frac{\pi}{2}}$. D'après la formule de Moivre puis par identification (ne pas oublier le modulo...), on a :

$$\begin{aligned}z^4 = 16i &\iff r^4 e^{i4\theta} = 16 e^{i\frac{\pi}{2}} \iff \begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{8} \pmod{\frac{\pi}{2}} \end{cases}\end{aligned}$$

par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^{1/4}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et car $r > 0$. Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{2 e^{i\frac{\pi}{8}}, 2 e^{i\frac{5\pi}{8}}, 2 e^{i\frac{9\pi}{8}}, 2 e^{i\frac{13\pi}{8}}\right\}}$$

3. On procède de la même façon qu'à la question précédente. Avec la même rédaction, on a :

$$\begin{aligned}z^5 = 1 + i &\iff r^5 e^{i5\theta} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \iff \begin{cases} r^5 = \sqrt{2} \\ 5\theta = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 2^{1/10} \\ \theta = \frac{\pi}{20} \pmod{\frac{2\pi}{5}} \end{cases}\end{aligned}$$

par stricte croissance de $t \mapsto t^{1/5}$ sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{2^{1/10} e^{i\frac{\pi}{20}}, 2^{1/10} e^{i\frac{9\pi}{20}}, 2^{1/10} e^{i\frac{17\pi}{20}}, 2^{1/10} e^{i\frac{25\pi}{20}}, 2^{1/10} e^{i\frac{33\pi}{20}}\right\}}$$

4. On remarque que le nombre complexe nul est solution de l'équation. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $z = r e^{i\theta}$. D'après la formule de Moivre puis par identification (ne pas oublier le modulo...), on a :

$$4\bar{z} = z^3 \iff 4r e^{-i\theta} = r^3 e^{i3\theta} \iff r^2 e^{i4\theta} = 4 e^{i0} \iff \begin{cases} r^2 = 4 \\ 4\theta = 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta = 0 \pmod{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

par croissance stricte de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+^*$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ 0, 2, 2e^{i\frac{\pi}{2}}, -2, 2e^{i\frac{3\pi}{2}} \right\} = \{0, 2, 2i, -2, -2i\}$$

5. Soit $z \in \mathbb{C}$. En posant $Z = z^2$, on obtient :

$$z^4 - 2\cos(2\theta)z^2 + 1 = 0 \iff Z^2 - 2\cos(2\theta)Z + 1 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $4\cos(2\theta)^2 - 4 = -4\sin(2\theta)^2 \leq 0$. Ou bien l'équation admet deux racines complexes conjuguées distinctes (lorsque le sinus n'est pas nul), ou bien une racine réelle double (quand le sinus est nul). Dans les deux cas, les solutions (éventuellement confondues) de l'équation sont :

$$Z = \frac{2\cos(2\theta) + 2i\sin(2\theta)}{2} = e^{i2\theta} \quad \text{et} \quad Z = e^{-i2\theta}$$

et donc (en utilisant la formule de Moivre pour la factorisation) :

$$\begin{aligned} z^4 - 2\cos(2\theta)z^2 + 1 = 0 &\iff z^2 = e^{i2\theta} \text{ ou } z^2 = e^{-i2\theta} \\ &\iff (z - e^{i\theta})(z + e^{i\theta}) = 0 \text{ ou } (z - e^{-i\theta})(z + e^{-i\theta}) = 0 \\ &\iff z = e^{i\theta} \text{ ou } z = e^{-i\theta} \text{ ou } z = e^{-i\theta} \text{ ou } z = -e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathcal{S} = \{e^{i\theta}, -e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -e^{-i\theta}\}$$

6. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. En posant $Z = \frac{z+i}{z-i}$, on a :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0 \iff Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$$

On remarque que -1 est racine de $Z^3 + Z^2 + Z + 1$ donc on peut factoriser cette expression polynomiale par $Z+1$. On a la factorisation $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = (Z+1)(Z^2+1)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0 &\iff Z = -1 \text{ ou } Z = i \text{ ou } Z = -i \\ &\iff \frac{z+i}{z-i} = -1 \text{ ou } \frac{z+i}{z-i} = i \text{ ou } \frac{z+i}{z-i} = -i \\ &\iff \dots \\ &\iff z = 0 \text{ ou } z = 1 \text{ ou } z = -1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \{0, 1, -1\}$$

7. C'est une question de cours.

Le nombre complexe 0 n'est pas solution de l'équation. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $z = r e^{i\theta}$. D'après la formule de Moivre, $z^n = r^n e^{in\theta}$. On a donc :

$$z^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = e^{i0} \iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0 \pmod{\frac{2\pi}{n}} \end{cases}$$

par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^{1/n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et car $r > 0$). Donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

Exercice 13

4. On remarque que 0 est solution de l'équation (car $\bar{0} = 0$ et $0^n = 0$ car $n \geq 1$). Soit maintenant $z \in \mathbb{C}^*$. Si z est solution, alors $z^n = \bar{z}$ et donc $|z^n| = |\bar{z}|$, soit encore $|z|^n = |z|$ (puisque $|\bar{z}| = |z|$). Or $|z| \neq 0$ (car $z \neq 0$) donc la dernière égalité se réécrit $|z|^{n-1} = 1$, ce qui implique que $|z| = 1$ (par injectivité de $x \mapsto x^{n-1}$ sur $\mathbb{R}_+$ et car $|z| \in \mathbb{R}_+$). On a donc montré que si $z \in \mathbb{C}^*$ est solution de l'équation, alors $z \in \mathbb{U}$.

Soit maintenant $z \in \mathbb{U}$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. On résout :

$$\begin{aligned} z^n = \bar{z} &\iff e^{in\theta} = e^{-i\theta} \quad (\text{formule de Moivre}) \\ &\iff n\theta \equiv -\theta \pmod{2\pi} \\ &\iff (n+1)\theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ &\iff \theta \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{n+1}} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{2k\pi}{n+1} \\ &\iff z \in \mathbb{U}_{n+1} \quad (\text{voir la description de } \mathbb{U}_{n+1} \text{ dans le cours au besoin}) \end{aligned}$$

Ainsi :

l'ensemble des solutions cherché est $\{0\} \cup \mathbb{U}_{n+1}$ **Exercice 15** fait en TD**Exercice 16** Soient $a, \theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.★ **Calcul de la somme S**

On utilise la formule de duplication du cosinus :

$$S = \sum_{k=0}^n \frac{1 - \cos(2k\theta)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n 1 - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^n \cos(2k\theta)}_{\text{notée } \tilde{S}} = \frac{n+1}{2} - \frac{\tilde{S}}{2}$$

Par $\mathbb{R}$ -linéarité de la partie réelle, on a :

$$\tilde{S} = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{2ik\theta}) = \operatorname{Re}(E) \quad \text{où} \quad E = \sum_{k=0}^n e^{2ik\theta}$$

— Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors $e^{2i\theta} = 1$ et alors $E = n+1$ et $\tilde{S} = \operatorname{Re}(E) = n+1$.— Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, alors $e^{2i\theta} \neq 1$ et :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=0}^n (e^{2i\theta})^k = \frac{1 - e^{2i(n+1)\theta}}{1 - e^{2i\theta}} = \frac{e^{i(n+1)\theta} \times (-2i \sin((n+1)\theta))}{e^{i\theta} \times (-2i \sin(\theta))} \\ &= \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} e^{in\theta} \end{aligned}$$

$$\text{et donc } \tilde{S} = \operatorname{Re}(E) = \frac{\sin((n+1)\theta) \cos(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Finalement :

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \in \pi\mathbb{Z} \\ \frac{n+1}{2} - \frac{\sin((n+1)\theta) \cos(n\theta)}{2 \sin(\theta)} & \text{si } \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

★ **Calcul de la somme T** On utilise à nouveau la $\mathbb{R}$ -linéarité de la partie réelle (un coefficient binomial est un nombre réel) et on obtient :

$$T = \operatorname{Re}(F) \quad \text{où} \quad F = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta}$$

D'après la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, on a :

$$F = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k = (1 + e^{i\theta})^n = 2^n \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^n e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

en utilisant la technique de l'angle moitié. Ainsi :

$$T = \operatorname{Re}(F) = 2^n \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

Exercice 17 On note F , G et H des primitives respectives de f , g et h sur $\mathbb{R}$.

1. En linéarisant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\sin(3x)}{4} + \frac{\sin(5x)}{4}$$

donc :

$$F : x \mapsto -\frac{\cos(x)}{2} + \frac{\cos(3x)}{12} - \frac{\cos(5x)}{20}$$

2. En linéarisant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{8} - \frac{\cos(4x)}{8}$$

donc :

$$G : x \mapsto \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}$$

3. En linéarisant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{3 \cos(3x)}{4} + \frac{\cos(9x)}{4}$$

donc :

$$H : x \mapsto \frac{\sin(3x)}{4} + \frac{\sin(9x)}{36}$$

Exercice 18 Fait en TD

Exercice 19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.

- ★ Si $n = 1$, on a $S_1 = 1$ car $\mathbb{U}_1 = \{1\}$. On suppose maintenant que $n \geq 2$. Alors $\frac{2\pi}{n} \in]0, \pi]$ donc $e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$. D'après la formule de Moivre (et la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1), on a :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

car $e^{2i\pi} = 1$. Ainsi :

$$S_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

- ★ On a d'après la formule du binôme de Newton :

$$S_2 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \omega^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^k$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^k = \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\ell\pi}{n}} \right)^k = \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)^\ell$$

d'après la formule de Moivre. Si $k \in \{0, n\}$, alors $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1$ et donc $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^k = n$. Si

$k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, alors $\frac{2k\pi}{n} \in]0, 2\pi[$ donc $e^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 1$. Ainsi :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^k = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)^n}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = 0$$

car $e^{2ik\pi} = 1$. Finalement :

$$S_2 = 2n$$

- ★ Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} \left| e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1 \right| &= \left| e^{i\frac{k\pi}{n}} \left(e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) \right| = \left| e^{i\frac{k\pi}{n}} \right| \times \left| -2i \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right| \\ &= \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

car $\sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \geq 0$ (car $\frac{k\pi}{n} \in [0, \pi]$). On en déduit que :

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} 2 \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im} \left(e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) = 2 \operatorname{Im}(E),$$

où :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{\pi}{n}} \right)^k = \frac{1 - \left(e^{i\frac{\pi}{n}} \right)^n}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \quad (\text{car } e^{i\frac{\pi}{n}} \neq 1) \\ &= \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}} \times \left(-2i \sin \left(\frac{\pi}{2n} \right) \right)} \\ &= i \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2n} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2n} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2n} \right)} \end{aligned}$$

Finalement :

$$S_3 = \frac{1}{\tan \left(\frac{\pi}{2n} \right)}$$

- ★ On a :

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \exp \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2ik\pi}{n} \right) = \exp \left(\frac{2i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \right) \\ &= \exp \left(\frac{2i\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2} \right) \\ &= e^{i\pi(n-1)} \end{aligned}$$

Finalement :

$$P = (-1)^{n-1}$$

Exercice 20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}} \right)$$

Par $\mathbb{R}$ -linéarité de la partie réelle, la somme à calculer, notée S , est égale à :

$$S = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}} \right) = \operatorname{Re}(E) \quad \text{en posant} \quad E = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a (en utilisant la formule de Moivre) :

$$e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}} = e^{i\frac{\pi}{2n+1}} \times \left(e^{i\frac{2\pi}{2n+1}} \right)^k$$

Par linéarité de la somme, on a :

$$E = e^{i\frac{\pi}{2n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{2n+1}} \right)^k$$

Or $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\frac{2\pi}{2n+1} \in]0, \pi]$. On a donc $e^{i\frac{2\pi}{2n+1}} \neq 1$. En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, on obtient :

$$E = e^{i\frac{\pi}{2n+1}} \times \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{2n+1}} \right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{2n+1}}} = e^{i\frac{\pi}{2n+1}} \times \frac{1 - e^{i\frac{2n\pi}{2n+1}}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{2n+1}}}$$

puis, en utilisant le technique de l'angle moitié :

$$E = \frac{e^{i\frac{\pi}{2n+1}} + 1}{e^{i\frac{\pi}{2n+1}}(-2i \sin(\frac{\pi}{2n+1}))} = \frac{1}{2 \sin(\frac{\pi}{2n+1})} (1 + e^{-i\frac{\pi}{2n+1}})$$

Finalement, en considérant la partie réelle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

Exercice 21 Fait en TD.

Exercice 22 On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de chacune des équations.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}}$$

donc :

$$\begin{aligned} e^z = 1 + i &\iff e^z = e^{\ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}} \\ &\iff z \equiv \frac{\ln(2)}{2} + i\frac{\pi}{4} [2i\pi] \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\ln(2)}{2} + i\frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. En multipliant par $e^z \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} e^z + e^{-z} = 1 &\iff (e^z)^2 - e^z + 1 = 0 \\ &\iff x^2 - x + 1 = 0 \quad (\text{en posant } x = e^z) \\ &\iff x = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \\ &\iff e^z = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } e^z = e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &\iff z \equiv -i\frac{\pi}{3} [2i\pi] \text{ ou } z \equiv i\frac{\pi}{3} [2i\pi] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \left\{ -i\frac{\pi}{3} + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ i\frac{\pi}{3} + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

4. On procède comme à la question précédente.

5. Idem

Exercice 24

1. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} |u + v|^2 + |u - v|^2 &= (u + v)(\bar{u} + \bar{v}) + (u - v)(\bar{u} - \bar{v}) \\ &= |u|^2 + u\bar{v} + \bar{u}v + |v|^2 + |u|^2 - u\bar{v} - \bar{u}v + |v|^2, \end{aligned}$$

i.e. :

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs est égale à la somme des carrés des diagonales.

2. On suppose que $|u| \leq 1$ et $|v| \leq 1$. Par l'absurde, supposons que :

$$\forall \varepsilon \in \{-1, 1\}, \quad |u + \varepsilon v| > \sqrt{2}$$

i.e. :

$$|u - v| > 1 \quad \text{et} \quad |u + v| > \sqrt{2},$$

soit encore :

$$|u - v|^2 > 1 \quad \text{et} \quad |u + v|^2 > 2$$

D'après la question précédente, on a :

$$2(|u|^2 + |v|^2) > 4 \quad \text{i.e.} \quad |u|^2 + |v|^2 > 2$$

Ceci est absurde car, par hypothèse, on a $|u| \leq 1$ et $|v| \leq 1$ donc $|u|^2 + |v|^2 \leq 2$.

Ainsi :

$$\exists \varepsilon \in \{-1, 1\}, \quad |u + \varepsilon v| \leq \sqrt{2}$$

Exercice 26

1. Déterminons le centre de cette similitude :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, \quad a(z) = z &\iff iz + 1 = z \iff (1 - i)z = 1 \\ &\iff z = \frac{1}{1 - i} = \frac{1 + i}{2} \end{aligned}$$

Posons $\omega = \frac{1 + i}{2}$ et notons Ω le point du plan complexe d'affixe ω . Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} a(z) - \omega &= a(z) - a(\omega) = (iz + 1) - (i\omega + 1) = i(z - \omega) \\ &= 1 \times e^{i\frac{\pi}{2}} (z - \omega) \end{aligned}$$

Par conséquent, a est la composée de la rotation de centre Ω et de rayon $\frac{\pi}{2}$ et de l'homothétie de centre Ω et de rapport 1.

2. Déterminons le centre de cette similitude :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad b(z) = z \iff 3z - 2 = z \iff z = 1$$

Posons $\omega = 1$ et notons Ω le point du plan complexe d'affixe ω . Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$b(z) - \omega = b(z) - b(\omega) = (3z - 2) - (3\omega - 2) = 3(z - \omega)$$

Par définition d'une homothétie, l'application b est l'homothétie de centre Ω et de rapport 3.

3. L'application c est la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $3 - 5i$.