

NOMBRES COMPLEXES

1 Formes algébriques et trigonométriques

Exercice 1 1. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} z_1 &= (1 - i\sqrt{3})^2 & z_2 &= \frac{1 - 4i}{1 + 5i} & z_3 &= \frac{1 + i}{1 - i} \\ z_4 &= \frac{1 - 2i}{1 + 5i} + \frac{1 + 2i}{1 - 5i} & z_5 &= (2 + i)^3 & z_6 &= \frac{-4}{1 + i\sqrt{5}} \\ z_7 &= \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^2 & z_8 &= (a + ib)^3 + (a - ib)^3 \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer, en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$, les quantités suivantes :

$$\operatorname{Re}(iz), \quad \operatorname{Im}(iz), \quad \operatorname{Re}(z^2) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z^2)$$

Exercice 2 Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes z suivants. On discutera suivant les valeurs des nombres réels α et β dans les questions 11. et 12.

1. $z = 7$
2. $z = -3$
3. $z = 3i$
4. $z = -1 + i\sqrt{3}$
5. $z = 2 - 2i$
6. $z = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{3}}$
7. $z = 1 + i \tan(\alpha)$ ($\alpha \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$)
15. $z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ en élevant préalablement le nombre complexe au carré
16. $z = \frac{e^{i\alpha} - 1}{ie^{i\beta} + 1}$ où ici $(\alpha, \beta) \in]0, 2\pi[\times]0, \frac{\pi}{2}[$ en justifiant d'abord que ce nombre complexe est bien défini
8. $z = -4i$
9. $z = 1 - e^{i\frac{\pi}{4}}$
10. $z = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$
11. $z = e^{i\alpha} + 1$
12. $z = e^{i\alpha} - e^{i\beta}$
13. $z = (1 - i)(1 + i\sqrt{3})$
14. $z = \frac{1}{(\sqrt{3} + i)^4}$

Exercice 3 Déterminer les entiers naturels n tels que :

1. $(1 + i)^n \in \mathbb{R}$
2. $(\sqrt{3} + i)^n \in i\mathbb{R}$

Exercice 4 On considère le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $1 + j^k + j^{2k}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
(a) Exprimer sous la forme d'une somme la quantité :

$$(1 + 1)^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n$$

- (b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$.

Exercice 5 1. Résoudre l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2. On note j l'unique solution de l'équation précédente de partie imaginaire positive. Montrer que $j^3 = 1$. Résoudre plus généralement l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
3. Mettre les nombres complexes suivants sous la forme $a + bj$, où a et b sont des nombres réels :

$$z_1 = (1 + j)^7, \quad z_2 = (2 - j)(3 + 2j), \quad z_3 = \frac{j^9}{1 + j} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{1}{1 - j}$$

4. Pour tous $u, v \in \mathbb{C}$, simplifier le produit $(u + v)(u + jv)(u + j^2v)$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{j, \bar{j}\}$ l'équation :

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 + z + z^2} \right) = 0$$

2 Caractérisation des réels et des imaginaires purs

Exercice 6 Les quatre questions sont indépendantes.

1. Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 tels que $ac \neq -1$. Montrer que le nombre complexe $z = \frac{(c - b)(1 + ab)}{b(1 + ac)}$ est un imaginaire pur.
2. Soient z et u des nombres complexes tels que $u \neq 1$. Montrer que :

$$\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R} \iff (u \in \mathbb{U} \text{ ou } z \in \mathbb{R})$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que :

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff (z \in \mathbb{U} \text{ ou } z \in \mathbb{R})$$

4. Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 tels que $b \neq c$. Montrer que :

$$\frac{b}{a} \left(\frac{c-a}{c-b} \right)^2 \in \mathbb{R}_+$$

Exercice 7 On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. Vérifier que :

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad \frac{1}{z} = \bar{z}$$

2. Montrer que la fonction $\varphi : z \mapsto |1 + iz|^2 + |z + i|^2$ est constante sur $\mathbb{U}$.

3. Pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, calculer $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-z} \right)$.

4. Montrer que :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{U}, \quad |a + b + c| = |ab + bc + ac|$$

5. Montrer que :

$$\forall z, z' \in \mathbb{U}, \quad zz' \neq -1 \implies \frac{z + z'}{1 + zz'} \in \mathbb{R}$$

Exercice 8 1. On considère la fonction $f : z \mapsto \frac{z+1}{z-2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ tels que :

- (a) $|f(z)| = 1$;
- (b) $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$.

2. On considère la fonction $g : z \mapsto \frac{2z-i}{z-2i}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ tels que :

- (a) $g(z) \in \mathbb{R}$;
- (b) $|g(z)| = 1$.

3 Équations

Exercice 9 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z + \bar{z} = |z|$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z+1| = |z| + 1$.

Exercice 10 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^2 + (4-3i)z = 2+8i$
3. $z^2 + 5z + 7 - i = 0$
5. $2z^2 + (8-5i)z + (4-13i) = 0$

2. $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$
4. $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$

Exercice 11 Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 3i \\ xy = -1 - 3i \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 13i \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y = -a \\ xy = a^2 \end{cases} \quad (\text{où } a \in \mathbb{C})$

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (d'inconnue z) :

1. $z^3 = 1$
2. $z^4 = 16i$
3. $z^5 = i + 1$
4. $z^3 = 4\bar{z}$
5. $z^4 - 2\cos(2\theta)z^2 + 1 = 0$ (où $\theta \in \mathbb{R}$)
6. $\left(\frac{z+i}{z-i} \right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0$
7. $z^n = 1$ où n est un entier naturel non nul (*généralisation de la question 1.*)

Exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $z^4 = 4 + 4i$
2. $(z-1)^3 = 8i$
3. $z^n + 1 = 0$
4. $z^n = \bar{z}$
5. $\left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n = 1$

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$
2. $z^6 - 2z^3 \cos(\varphi) + 1 = 0$, où $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 On note $(*)$ l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ solution de $(*)$, on a $x^2 + x - 1 = 0$ où $x = z + \frac{1}{z}$.
2. Montrer que $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ est solution de $(*)$.
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

4 Sommes trigonométriques

Exercice 16 Soient $(a, \theta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)^2 \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$$

Exercice 17 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos(2x)^2 \sin(x)$
2. $g : x \mapsto \cos(x)^2 \sin(x)^2$
3. $h : x \mapsto \cos(3x)^3$

Exercice 18 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

2. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes et produit suivants :

$$S_1 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega, \quad S_2 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1 + \omega)^n, \quad S_3 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1| \quad \text{et} \quad P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$$

Exercice 20 Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

Exercice 21 (banque CCINP) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

5 Exponentielle complexe

Exercice 22 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $e^z = 1 + i$
2. $e^z = -5 - 12i$
3. $e^z + e^{-z} = 1$
4. $e^z + e^{-z} = 2i$
5. $e^z + 2e^{-z} = i$

6 Géométrie

Exercice 23 Soit $z \in \mathbb{C}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur z :

1. les points d'affixes $1, z$ et z^2 sont-ils alignés ?
2. les vecteurs d'affixes z et $\bar{z}$ sont-ils orthogonaux ?
3. les points d'affixes $z, \frac{1}{z}$ et $1 - z$ sont-ils situés sur un même cercle de centre 0 ?

Exercice 24 Soit $u, v \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que :

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

Quelle interprétation géométrique peut-on en faire ?

2. On suppose que $|u| \leq 1$ et $|v| \leq 1$. Montrer que :

$$\exists \varepsilon \in \{-1, 1\}, \quad |u + \varepsilon v| \leq \sqrt{2}$$

Exercice 25 Représenter géométriquement les ensembles suivants :

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$
2. $B = \{a + r e^{it} \mid t \in [0, \pi]\} \quad (a \in \mathbb{C}, r > 0)$
3. $C = \{a + \lambda e^{i\theta} \mid \lambda > 0\} \quad (a \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R})$
4. $D = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) \equiv \theta \pmod{2\pi}\} \quad (\theta \in \mathbb{R})$
5. $E = \{z \in \mathbb{C}^* \mid 2 \arg(z) \equiv \theta \pmod{2\pi}\} \quad (\theta \in \mathbb{R})$

Exercice 26 1. Caractériser géométriquement les applications suivantes (c'est-à-dire préciser de quel type de similitude du plan il s'agit et déterminer les invariants : vecteur, centre, rapport, etc) :

- (a) $a : z \mapsto iz + 1$
- (b) $b : z \mapsto 3z - 2$
- (c) $c : z \mapsto z + 3 - 5i$
- (d) $d : z \mapsto 2(1 + i)z - 7 - 4i$

2. Déterminer une expression explicite de la rotation de centre d'affixe $1 + i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.
3. On note r la rotation de centre d'affixe $2 + i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Soit encore s la symétrie centrale de centre d'affixe $1 - i$. Caractériser géométriquement $s \circ r$.

Exercice 27 On note $\mathbb{U}$ le cercle unité. Quelle est l'image de $\mathbb{U} \setminus \{1\}$ par l'application $f : z \mapsto \frac{1}{1 - z}$.