

MATRICES ET SYSTÈMES LINÉAIRES

(corrigés)

Exercice 1 Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Il existe $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. D'une part :

$$\begin{aligned} \det(A) \det(B) &= (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \\ &= ad\alpha\delta - ad\beta\gamma - bc\alpha\delta + bc\beta\gamma \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (c\alpha + d\gamma)(a\beta + b\delta) \\ &= ac\alpha\beta + ad\alpha\delta + bc\beta\gamma + bd\gamma\delta - ac\alpha\beta - bc\alpha\delta - ad\beta\gamma - bd\gamma\delta \\ &= ad\alpha\delta + bc\beta\gamma - bc\alpha\delta - ad\beta\gamma \\ &= \det(A) \det(B) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \quad \det(AB) = \det(A) \det(B)}$$

Exercice 2 Montrons que $(\mathcal{H}, \times)$ est un groupe. Tout d'abord, $\mathcal{H}$ est non vide car $0 \in \mathbb{R}$ donc $\mathcal{H}$ contient :

$$H(0) = \begin{pmatrix} \text{ch}(0) & \text{sh}(0) \\ \text{sh}(0) & \text{ch}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\det(H(x)) = \begin{vmatrix} \text{ch}(x) & \text{sh}(x) \\ \text{sh}(x) & \text{ch}(x) \end{vmatrix} = \text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 = 1 \neq 0$$

donc $H(x) \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$. On a donc montré l'inclusion $\mathcal{H} \subset \text{GL}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, pour montrer que $(\mathcal{H}, \times)$ est un groupe, il suffit de montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$.

★ Soient $X, Y \in \mathcal{H}$. Il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $X = H(x)$ et $Y = H(y)$. Alors :

$$\begin{aligned} H(x)H(y) &= \begin{pmatrix} \text{ch}(x) & \text{sh}(x) \\ \text{sh}(x) & \text{ch}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch}(y) & \text{sh}(y) \\ \text{sh}(y) & \text{ch}(y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y) & \text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{ch}(y)\text{sh}(x) \\ \text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{ch}(y)\text{sh}(x) & \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{ch}(y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch}(x+y) & \text{sh}(x+y) \\ \text{sh}(x+y) & \text{ch}(x+y) \end{pmatrix} \quad (\text{cf. Exercice 5 du TD\#1}) \end{aligned}$$

Comme $x + y \in \mathbb{R}$, on a :

$$H(x)H(y) = H(x+y) \in \mathcal{H}$$

★ Soit $X \in \mathcal{H}$. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $X = H(x)$. On a $-x \in \mathbb{R}$ donc, d'après le calcul précédent :

$$H(x)H(-x) = H(x + (-x)) = H(0) = I_2$$

et, de la même manière, on a $H(-x)H(x) = I_2$. On en déduit que :

$$H(x)^{-1} = H(-x) \in \mathcal{H}$$

Finalement, $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$. Ainsi :

$$\boxed{(\mathcal{H}, \times) \text{ est un groupe}}$$

Exercice 3 Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) &\iff (AB)^T = AB \\ &\iff B^T A^T = AB \quad (\text{propriété de la transposition}) \\ &\iff BA = AB \quad (\text{car } A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}), \quad AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \iff AB = BA}$$

Exercice 4 Pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}^*$, on note $\text{Stoch}_{k,\ell}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices stochastiques à k lignes et ℓ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ et $(S, T) \in \text{Stoch}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \text{Stoch}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrons que $ST \in \text{Stoch}_{n,q}(\mathbb{K})$.
On note :

$$S = (s_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{et} \quad T = (t_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

Par hypothèse sur les matrices S et T , on a :

$$(i) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad s_{i,j} \geq 0;$$

$$(ii) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \quad t_{i,j} \geq 0;$$

$$(iii) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^p s_{i,j} = 1;$$

$$(iv) \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^q t_{i,j} = 1.$$

On sait que :

$$ST = \left(\sum_{k=1}^p s_{i,k} t_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$$

★ Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $s_{i,k} \geq 0$ et $t_{k,j} \geq 0$ (d'après (i) et (ii)) donc $s_{i,k} t_{k,j} \geq 0$. Une somme de nombres réels positifs étant positive, on peut conclure que $(ST)_{i,j} \geq 0$.

★ Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q (ST)_{i,j} &= \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^p s_{i,k} t_{k,j} = \sum_{k=1}^p s_{i,k} \underbrace{\sum_{j=1}^q t_{k,j}}_{=1 \text{ d'après (iv)}} \\ &= \sum_{k=1}^p s_{i,k} \\ &= 1 \quad (\text{d'après (iii)}) \end{aligned}$$

Finalement, les coefficients de la matrice ST sont positifs ou nuls et la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. On a donc $ST \in \text{Stoch}_{n,q}(\mathbb{K})$. Ainsi :

le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique

Exercice 5

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes qui commutent. Il existe $k, \ell \in \mathbb{N}^*$ tels que $A^k = A^\ell = 0_n$.

★ Montrons que la matrice AB est nilpotente. On a $k\ell \in \mathbb{N}^*$ et, comme A et B commutent,

$$(AB)^k = A^k B^k = 0_n B^k = 0_n$$

Ainsi, la matrice AB est nilpotente.

★ Montrons que la matrice $A + B$ est nilpotente. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton (qui s'applique puisque A et B commutent), on a :

$$(A + B)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} A^i B^{p-i}$$

Remarque : on veut trouver un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(A + B)^p = 0_n$. Il suffit que pour tout $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on ait $A^i B^{p-i} = 0_n$. Or, si $i \geq k$, on sait que $A^i = 0_n$ (en effet, on sait que $A^k = 0_n$ et on montre par récurrence que pour tout entier $i \geq k$, on a bien $A^i = 0_n$). On doit choisir l'entier p de telle sorte que si $i \leq k-1$, on ait $p-i \geq \ell$ (i.e. $p \geq i + \ell$).

On choisit $p = k + \ell \in \mathbb{N}^*$.

— Pour tout $i \in \llbracket k, p \rrbracket$, on a $A^i = 0_n$ donc $\binom{p}{i} A^i B^{p-i} = 0_n$.

— Soit $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$. On a $i \leq k-1$ donc :

$$p - i \geq p - (k-1) = \ell + 1 \geq \ell$$

$$\text{donc } B^{p-i} = 0_n \text{ et donc } \binom{p}{i} A^i B^{p-i} = 0_n.$$

Finalement, $(A + B)^p = 0_n$. La matrice $A + B$ est donc nilpotente.

Ainsi :

les matrices AB et $A + B$ sont nilpotentes

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. On a (par bilinéarité du produit matriciel) :

$$\begin{aligned} (I_n - M) \sum_{\ell=0}^k M^\ell &= \sum_{\ell=0}^k M^\ell - \sum_{\ell=0}^k M^{\ell+1} \\ &= M^0 - M^{k+1} \quad (\text{sommes télescopiques}) \\ &= I_n - M^{k+1} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (I_n - M) \sum_{\ell=0}^k M^\ell = I_n - M^{k+1}$$

La matrice M étant nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_n$. L'égalité précédente appliquée avec l'entier $k = p - 1 \in \mathbb{N}$ nous donne :

$$(I_n - M) \sum_{\ell=0}^{p-1} M^\ell = I_n - M^p = I_n - 0_n = I_n$$

On peut vérifier (le calcul est le même) qu'on a également :

$$\left(\sum_{\ell=0}^{p-1} M^\ell \right) (I_n - M) = I_n - M^p = I_n$$

On en déduit que :

la matrice $I_n - M$ est inversible d'inverse $\sum_{\ell=0}^{p-1} M^\ell \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 6

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notées :

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{et} \quad B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

★ On a $AB = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ donc :

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} |(AB)_{i,j}| = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| &\leq \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| + \underbrace{\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n |b_{\ell,j}|}_{\geq 0} \\ &= \sum_{1 \leq \ell, j \leq n} |b_{\ell,j}| \\ &= \|B\| \end{aligned}$$

Pour tout $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $|a_{i,k}| \geq 0$ donc :

$$|a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \leq |a_{i,k}| \|B\|$$

et donc, en sommant les inégalités,

$$\begin{aligned} \|AB\| &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{i,k}| \|B\| = \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{i,k}| \right) \|B\| \\ &= \|A\| \|B\| \end{aligned}$$

Finalement, on a l'inégalité :

$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

★ De plus $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ donc :

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \\ &\leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} (|a_{i,j}| + |b_{i,j}|) \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| + \sum_{1 \leq i,j \leq n} |b_{i,j}| \quad (\text{linéarité de la somme}) \\ &= \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

Ainsi :

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\|A\| \neq \|B\|$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Par bilinéarité du produit matriciel, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} A^i (A - B) B^{k-i-1} &= \sum_{i=0}^{k-1} (A^{i+1} B^{k-(i+1)} - A^i B^{k-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} A^{i+1} B^{k-(i+1)} - \sum_{i=0}^{k-1} A^i B^{k-i} \\ &= A^k B^0 - A^0 B^k \quad (\text{sommes télescopiques}) \end{aligned}$$

Or $A^0 = B^0 = I_n$ donc :

$$A^k - B^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i (A - B) B^{k-i-1}$$

- (b) Par définition de $\|A - B\|$, on a $\|A - B\| \geq 0$ (une somme de nombres réels positifs est positive). Par l'absurde, supposons que $\|A - B\| = 0$. On a alors (par définition de $\|A - B\|$) :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j} - b_{i,j}| = 0$$

avec des notations naturelles pour les coefficients de A et B . Or une somme de nombres réels positifs est nulle si et seulement si chaque sommant est nul donc :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_{i,j} - b_{i,j}| = 0$$

i.e. (d'après les propriétés de la valeur absolue) :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{i,j} - b_{i,j} = 0 \quad \text{i.e.} \quad a_{i,j} = b_{i,j}$$

Autrement dit, $A = B$ et donc $\|A\| = \|B\|$, ce qui est exclu. Finalement, $\|A - B\| \geq 0$ et $\|A - B\| \neq 0$ donc :

$$\boxed{\|A - B\| > 0}$$

Démontrons maintenant l'inégalité. Tout d'abord, la question 1. et une récurrence immédiate permet d'obtenir que pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a les inégalités :

$$\|A_1 \cdots A_p\| \leq \|A_1\| \cdots \|A_p\| \quad \text{et} \quad \left\| \sum_{\ell=1}^p A_\ell \right\| \leq \sum_{\ell=1}^p \|A_\ell\|$$

L'égalité de la question 2.(a) nous donne :

$$\begin{aligned} \|A^k - B^k\| &= \left\| \sum_{i=0}^{k-1} A^i (A - B) B^{k-i-1} \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \|A^i (A - B) B^{k-i-1}\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \|A\|^i \|A - B\| \|B\|^{k-i-1} \\ &= \|A - B\| \sum_{i=0}^{k-1} \|A\|^i \|B\|^{k-i-1} \end{aligned}$$

Or, d'après la formule de factorisation (dans $\mathbb{C}$), on a :

$$\|A\|^k - \|B\|^k = (\|A\| - \|B\|) \sum_{i=0}^{k-1} \|A\|^i \|B\|^{k-i-1}$$

et sait que $\|A\| \neq \|B\|$ donc :

$$\sum_{i=0}^{k-1} \|A\|^i \|B\|^{k-i-1} = \frac{\|A\|^k - \|B\|^k}{\|A\| - \|B\|}$$

Ainsi :

$$\|A^k - B^k\| \leq \|A - B\| \times \frac{\|A\|^k - \|B\|^k}{\|A\| - \|B\|}$$

En divisant par $\|A - B\| > 0$, on peut conclure que :

$$\boxed{\frac{\|A^k - B^k\|}{\|A - B\|} \leq \frac{\|A\|^k - \|B\|^k}{\|A\| - \|B\|}}$$

Exercice 7

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. La matrice D est déterminée par :

$$D = (\lambda_i \delta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$(MD)_{i,i} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} D_{k,i} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} \lambda_k \delta_{k,i} = \lambda_i m_{i,i}$$

et :

$$(DM)_{i,i} = \sum_{k=1}^n D_{i,k} m_{k,i} = \sum_{k=1}^n \lambda_i \delta_{i,k} m_{k,i} = \lambda_i m_{i,i}$$

donc :

$$(MD - DM)_{i,i} = (MD)_{i,i} - (DM)_{i,i} = \lambda_i m_{i,i} - \lambda_i m_{i,i} = 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{les coefficients diagonaux de la matrice } MD - DM \text{ sont nuls}}$$

2. Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont nuls.

★ On a montré à la question précédente l'inclusion :

$$\{MD - DM \mid M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{D}$$

★ Montrons maintenant l'inclusion réciproque. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{D}$ (pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $a_{i,i} = 0$). On veut montrer que :

$$\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A = MD - DM$$

Soient $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} (MD - DM)_{i,j} &= (MD)_{i,j} - (DM)_{i,j} \\ &= \sum_{k=1}^n m_{i,k} \lambda_k \delta_{k,j} - \sum_{k=1}^n \lambda_i \delta_{i,k} m_{k,j} \\ &= \lambda_j m_{i,j} - \lambda_i m_{i,j} \\ &= (\lambda_j - \lambda_i) m_{i,j} \end{aligned}$$

De plus :

$$A = MD - DM \iff (\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} = (MD - DM)_{i,j})$$

On sait déjà que si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $a_{i,i} = (MD - DM)_{i,i} = 0$. Notons :

$$I = \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i \neq j\}$$

Alors :

$$\begin{aligned} A = MD - DM &\iff (\forall (i, j) \in I, a_{i,j} = (MD - DM)_{i,j}) \\ &\iff (\forall (i, j) \in I, a_{i,j} = (\lambda_j - \lambda_i) m_{i,j}) \\ &\iff \left(\forall (i, j) \in I, m_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{\lambda_j - \lambda_i} \right) \quad (\text{car } \lambda_i \neq \lambda_j) \quad (*) \end{aligned}$$

En effet, les nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts par hypothèse. Notons M la matrice dont les coefficients sont nuls sur la diagonale et dont les autres coefficients sont déterminés par (*). Les équivalences précédentes montrent que $A = MD - DM$ ce qui montre la deuxième inclusion.

Par double inclusion, on peut conclure que :

$$\boxed{\{MD - DM \mid M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\} = \mathcal{D}}$$

Remarque : on peut choisir ce qu'on veut sur la diagonale de la matrice M .

Exercice 8

1. On calcule les premières puissances. On conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

ce que l'on démontre par récurrence.

2. On calcule les premières puissances. On conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{2n} = 2^n I_2$$

ce que l'on vérifie par récurrence.

3. On montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

4. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 & 0 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

5. On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice N est nilpotente et on a l'égalité $E = N + I_3$.

On utilise la formule du binôme de Newton (les matrices N et I_3 commutent) et on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2 - n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. En procédant comme à la question précédente, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. On conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad G^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

On le démontre ensuite par récurrence.

8. On montre par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad H^k = n^{k-1} H$$

9. On a $J = H - I_n$ et les matrices H et $-I_n$ commutent (car $-I_n$ est une matrice scalaire). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} J^k &= \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} H^\ell (-I_n)^{k-\ell} \\ &= \underbrace{(-1)^k I_n}_{\ell=0} + \left[\sum_{\ell=1}^k \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} n^{\ell-1} \right] H \\ &= (-1)^k I_n + \frac{1}{n} \underbrace{\left[\sum_{\ell=1}^k \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} n^\ell \right]}_{\text{noté } \alpha} H \end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton (dans $\mathbb{R}$), on a :

$$\alpha = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} n^\ell - \underbrace{(-1)^k}_{\ell=0} = (n-1)^k + (-1)^{k+1}$$

Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad J^k = (-1)^k I_n + \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} H$$

Exercice 9 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. En calculant A^2 , on obtient :

$$A^2 = (a^2 + b^2 + c^2) \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2) A$$

On conjecture ensuite que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = (a^2 + b^2 + c^2)^{n-1} A$$

On le démontre ensuite par récurrence. Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3$.

Exercice 10

1. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 12 & -6 \\ -3 & 7 & -3 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix} = 3A - 2I_3$$

2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrons que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad A^k = a_k I_3 + b_k A$$

- ★ En posant $a_0 = 1 \in \mathbb{R}$ et $b_0 = 0 \in \mathbb{R}$, on a :

$$A^0 = I_3 = 1 \times I_3 + 0 \times A = a_0 I_3 + b_0 A$$

La propriété est donc vérifiée au rang $k = 0$.

- ★ Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tels que $A^k = a_k I_3 + b_k A$. Montrons qu'il existe a_{k+1}, b_{k+1} tels que $A^{k+1} = a_{k+1} I_3 + b_{k+1} A$. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= AA^k = A(a_k I_3 + b_k A) \\ &= a_k A + b_k A^2 \quad (\text{bilinéarité du produit matriciel}) \\ &= a_k A + b_k (3A - 2I_3) \quad (\text{question 1.}) \\ &= -2b_k I_3 + (a_k + 3b_k) A \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $a_{k+1} = -2b_k \in \mathbb{R}$ et $b_{k+1} = a_k + 3b_k \in \mathbb{R}$, on a l'égalité $A^{k+1} = a_{k+1} I_3 + b_{k+1} A$. La propriété est donc vérifiée au rang $k + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

il existe deux suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = a_k I_3 + b_k A$$

3. Nous avons démontré dans l'hérédité précédentes que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = -2b_k \quad \text{et} \quad b_{k+1} = a_k + 3b_k$$

De plus, $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ et comme $A^1 = A = 0 \times I_3 + 1 \times A$, on a $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a d'après les relations ci-dessus :

$$b_{k+2} = a_{k+1} + 3b_{k+1} = 3b_{k+1} - 2b_k$$

Ainsi, la suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre deux d'équation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$ dont les racines sont 1 et 2. Ainsi :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, \forall \in \mathbb{N}, \quad b_k = A + B2^k$$

En résolvant le système formé par les conditions $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = -1 + 2^k$$

De plus :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = -2b_{k-1} = -2(2^{k-1} - 1) = -2^k + 2$$

et cette égalité reste valable pour $k = 0$ car $a_0 = 1$. Par conséquent :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = (2 - 2^k)I_3 + (2^k - 1)A,$$

i.e. :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \begin{pmatrix} 3 - 2^{k+1} & 2^{k+2} - 4 & -2^{k+1} + 2 \\ 1 - 2^k & 2^{k+1} - 1 & 1 - 2^k \\ 2^k - 1 & -2^{k+1} + 2 & 2^k \end{pmatrix}$$

Exercice 11

1. On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^3 = 0_3$ et $A = N - 2I_3$. Les matrices N et $-2I_3$ commutent car la matrice $-2I_3$ est une matrice scalaire. La formule du binôme de Newton nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (-1)^n 2^{n-3} \begin{pmatrix} 8 & -4n & n^2 - 5n \\ 0 & 8 & -4n \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2u_n + v_n + w_n \\ -2v_n + w_n \\ -2w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= AX_n \end{aligned}$$

On montre ensuite par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0}$$

3. Par hypothèse, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n , on a alors (en utilisant les questions 1. et 2.) :

$$\begin{aligned} X_n = A^n X_0 &= (-1)^n 2^{n-3} \begin{pmatrix} 8 & -4n & n^2 - 5n \\ 0 & 8 & -4n \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n 2^{n-3} \begin{pmatrix} n^2 - 9n + 8 \\ 8 - 4n \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = (-1)^n 2^{n-3} (n^2 - 9n + 8) \\ v_n = (-1)^n 2^{n-3} (8 - 4n) \\ w_n = (-2)^n \end{cases}}$$

Exercices 12 et 13 La forme de l'ensemble des solutions d'un système linéaire dépend de la manière dont on échelonne le système (choix des lignes pivots et des inconnues principales et secondaires). Proposer un corrigé n'est donc pas pertinent.

Exercice 14

1. La matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12 & -6 & -4 \\ 6 & -3 & -1 \\ 18 & -12 & -6 \end{pmatrix}$.

2. La matrice B est inversible d'inverse $B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. La matrice C n'est pas inversible.

4. La matrice D est inversible d'inverse $D^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & - \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. La matrice E est inversible d'inverse $E^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Posons $J = F + I_n$ (matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1). Alors :

$$J^2 = nI_n \quad i.e. \quad F^2 + 2F + I_n = nI_n$$

car les matrices F et I_n commutent. On a donc $F^2 + 2F = (n - 1)I_n$ soit encore :

$$F \times \left[\frac{1}{n-1} (F + 2I_n) \right] = \left[\frac{1}{n-1} (F + 2I_n) \right] \times F = I_n$$

La matrice F est donc inversible d'inverse $F^{-1} = \frac{1}{n-1} (F + 2I_n)$.