

MATRICES ET SYSTÈMES LINÉAIRES

1 Manipulations de matrices

Exercice 1 Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Exercice 2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $H(x) = \begin{pmatrix} \text{ch}(x) & \text{sh}(x) \\ \text{sh}(x) & \text{ch}(x) \end{pmatrix}$. Soit encore :

$$\mathcal{H} = \{H(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que $(\mathcal{H}, \times)$ est un groupe.

Exercice 3 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques. Montrer que AB est une matrice symétrique si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 4 Une matrice (de taille quelconque et à coefficients dans $\mathbb{K}$) est dite *stochastique* si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.

Exercice 5 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que les matrices $A + B$ et AB sont nilpotentes.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer :

$$(I_n - M) \sum_{\ell=0}^k M^\ell$$

En déduire que la matrice $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 6 Pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$.

1. Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\| \quad \text{et} \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\|A\| \neq \|B\|$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que :

$$A^k - B^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i (A - B) B^{k-i-1}$$

(b) Justifier que $\|A - B\| > 0$ et établir que :

$$\frac{\|A^k - B^k\|}{\|A - B\|} \leq \frac{\|A\|^k - \|B\|^k}{\|A\| - \|B\|}$$

Exercice 7 Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres réels deux à deux distincts. On note D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

- Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la diagonale de la matrice $MD - DM$ est nulle.
- Montrer que l'ensemble

$$\{MD - DM \mid M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$$

est précisément l'ensemble des matrices de diagonale nulle.

2 Calculs de puissances

Exercice 8 Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 2. B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 3. C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

$$4. D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 5. E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 6. F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 8. H = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad 9. J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 9 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A^2 est *combinaison linéaire* de I_3 et A , c'est-à-dire :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad A^2 = \lambda I_3 + \mu A$$

2. En déduire qu'il existe deux suites de nombres réels $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = a_k I_3 + b_k A$$

3. Déterminer une expression explicite de a_k, b_k puis de A^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = -2v_n + w_n \\ w_{n+1} = -2w_n \end{cases}$$

et $u_0 = v_0 = w_0 = 1$.

1. On pose $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer A^n pour tout entier naturel n en utilisant la formule du binôme de Newton.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour tout entier naturel n , exprimer

X_n en fonction de X_0 .

3. En déduire les termes généraux des suites u, v et w .

3 Résolution de systèmes linéaires

Exercice 12 Résoudre les systèmes linéaires suivants (les inconnues étant des nombres réels) :

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases} & 2. \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 3y - 7z = 10 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases} \\ 3. \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - z = 1 \\ 4x + 7y + z = 1 \end{cases} & 4. \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y + 2z = 4 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 13 Pour tout $m \in \mathbb{R}$, résoudre les systèmes linéaires (paramétrés) suivants (les inconnues étant des nombres réels) :

$$\begin{array}{l} 1. \begin{cases} 2mx + y = 1 \\ 2x + my = m \end{cases} \\ 2. \begin{cases} x + my + 2z = 1 \\ mx + y + 2z = m \\ x + 2my + 3z = 0 \end{cases} \\ 3. \begin{cases} mx + my + 4z = 1 \\ 2x + y + mz = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \\ 4. \begin{cases} x + y + z = 1 - m \\ mx + (1+m)y + (1+m)z = m - m^2 \\ mx + (1-m)y + (1-m)z = m^2 \end{cases} \\ 5. \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + my + 6z = 6 \\ -x + 3y + (m-3)z = 0 \end{cases} \end{array}$$

4 Matrices inversibles

Exercice 14 Les matrices ci-dessous sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

$$\begin{array}{lll} 1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} & 2. B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} & 3. C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 4. D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 5. E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & 6. F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$