Matrices et systèmes linéaires

1 Manipulations de matrices

Exercice 1 Montrer que, pour tous $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Exercice 2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $H(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(x) & \operatorname{sh}(x) \\ \operatorname{sh}(x) & \operatorname{ch}(x) \end{pmatrix}$. Soit encore :

$$\mathscr{H} = \left\{ H(x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que l'ensemble $\mathscr{H}$ est stable par produit (*i.e.* : $\forall A, B \in \mathscr{H},\ AB \in \mathscr{H}$).

Exercice 3 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques. Montrer que AB est une matrice symétrique si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 4 Une matrice (de taille quelconque) est dite *stochastique* si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.

Exercice 5

1. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que les matrices $A + B$ et AB sont nilpotentes.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer :

$$(I_n - M) \sum_{\ell=0}^{k} M^\ell$$

En déduire que la matrice $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 6 Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$.

1. Montrer que :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \qquad \|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$$

2. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\|A\| \neq \|B\|$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que :

$$A^k - B^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i (A - B) B^{k-i-1}$$

   (b) En déduire que :

$$\frac{\|A^k - B^k\|}{\|A - B\|} \leqslant \frac{\|A\|^k - \|B\|^k}{\|A\| - \|B\|}$$

Exercice 7 Soient $d_1, \dots, d_n$ des nombres réels deux à deux distincts. On note D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $d_1, \dots, d_n$.

1. Montrer que, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la diagonale de la matrice $AM - MA$ est nulle.
2. Montrer que l'ensemble :

$$\left\{ AM - MA \,\middle|\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \right\}$$

est celui des matrices de diagonale nulle.

2 Calculs de puissances

Exercice 8 Calculer les puissances des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$
4. $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
8. $H = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
9. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
10. $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 9 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A^2 est combinaison linéaire de I_3 et A, c'est-à-dire :

$$\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad A^2 = \lambda I_3 + \mu A$$

2. En déduire qu'il existe deux suites de nombres réels $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad A^k = a_k I_3 + b_k A$$

3. Déterminer une expression explicite de a_k, b_k puis de A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} u_{n+1} & = & 2u_n & + & v_n & & \\ v_{n+1} & = & u_n & - & v_n & & \\ w_{n+1} & = & u_n & + & v_n & + & w_n \end{array} \right.$$

et $u_0 = v_0 = w_0 = 1$. Reformuler matriciellement ce système puis déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

3 Résolution de systèmes linéaires

Exercice 12 Résoudre les systèmes linéaires suivants (les inconnues étant des nombres réels) :

1. $\left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 2 \\ 3x & - & 5y & = & 1 \end{array} \right.$

2. $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & 3y & - & 7z & = & 10 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 6 \end{array} \right.$

3. $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & z & = & 1 \\ 4x & + & 7y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$

4. $\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{array} \right.$

Exercice 13 Pour tout $m \in \mathbb{R}$, résoudre les systèmes linéaires (paramétrés) suivants (les inconnues étant des nombres réels) :

1. $\left\{ \begin{array}{ccccc} 2mx & + & y & = & 1 \\ 2x & + & my & = & m \end{array} \right.$

2. $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & 2z & = & 1 \\ mx & + & y & + & 2z & = & m \\ x & + & 2my & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$

3. $\left\{ \begin{array}{ccccccc} mx & + & my & + & 4z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & mz & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$

4. $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1-m \\ mx & + & (1+m)y & + & (1+m)z & = & m-m^2 \\ mx & + & (1-m)y & + & (1-m)z & = & m^2 \end{array} \right.$

5. $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & my & + & 6z & = & 6 \\ -x & + & 3y & + & (m-3)z & = & 0 \end{array} \right.$

4 Matrices inversibles

Exercice 14 Les matrices ci-dessous sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$