

LOGIQUE ET THÉORIE DES ENSEMBLES

Exercice 1 Vrai ou faux ? Justifier.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \implies x \geq 3$;
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x < y \implies \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$;
3. $\exists x \in \mathbb{R}_+, x < \sqrt{x}$;
4. $\forall x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, x \neq x' \implies \frac{x+1}{x-1} \neq \frac{x'+1}{x'-1}$;
5. $\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k \geq N$;
6. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \geq 0 \implies x \geq 0$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est périodique sur $\mathbb{R}$;
2. f est majorée sur $\mathbb{R}$;
3. f est constante sur $\mathbb{R}$;
4. f est croissante sur $\mathbb{R}$;
5. f possède un minimum sur $\mathbb{R}$;
6. f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut sur $\mathbb{R}$;
7. f s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer les négations des assertions suivantes :

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$;
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$;
3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$;
4. $\forall x, y \in I, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$;
5. $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \implies x = y$;
6. $\forall x \in I, f(x) > 0 \implies x \leq 0$.

Exercice 4 (raisonnement direct) Démontrer que :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$;

2. $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x^n - x^{n+1} \leq 1$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$;
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$;
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$.

1 Disjonction de cas

Exercice 5 Montrer que, pour tout entier relatif n , le nombre $n^3 - n + 2024$ est un entier pair.

Exercice 6 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x + 1 \geq |x - 1|$$

Exercice 7 Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

2 Raisonnement par l'absurde ou par contraposition

Exercice 8 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

$$(\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \implies x = 0$$

2. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \implies (xy - x - y \neq 1)$$

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n^2 \text{ est un multiple de } 6) \iff (n \text{ est un multiple de } 6)$$

Exercice 9 On admet que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Exercice 10 Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = P(x)$$

3 Récurrences

Exercice 11 1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. En utilisant une récurrence double, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$$

2. Montrer qu'il existe un nombre réel x , non entier, tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 12 Pour tout entier naturel n , comparer les quantités $(n+1)!$ et 2^n .

Exercice 13 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la proposition $\mathcal{P}_n$: « l'entier $8^n + 1$ est divisible par 7 ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 14 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - X - 3$ admet deux racines réelles distinctes. On les notera α et β dans la suite.
2. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

Exercice 15 (récurrence) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, calculer le produit suivant :

$$p_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Exercice 16 (inégalité de Bernoulli) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

Exercice 17 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},$$

où $\sum_{k=1}^n a_k$ correspond à la somme $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Exercice 18 Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le terme général u_n en fonction de n .

Exercice 19 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists a_n, b_n \in \mathbb{N}, \quad (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

Exercice 20 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+1}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq a_n \leq n^2$$

Exercice 21 À l'aide d'une récurrence forte, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists p, q \in \mathbb{N}, \quad n = 2^p(2q+1)$$

4 Analyse-synthèse

Exercice 22 Déterminer les nombres réels x tels que $\sqrt{2-x} = x$.

Exercice 23 Déterminer les fonctions impaires $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $x \longmapsto f(x) - 1$ soit paire.

Exercice 24 Déterminer les solutions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f(y) = 3f(x-y)$$

Exercice 25 On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions affines et $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, d'une et une seule manière, d'une fonction de $\mathcal{A}$ et d'une fonction de $\mathcal{B}$.

5 Vocabulaire ensembliste

Exercice 26 Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x, y, z trois éléments deux à deux distincts de E . Peut-on écrire que :

1. $x \in E$
2. $\{x\} \in E$
3. $\{x\} \subset E$
4. $\emptyset \in E$
5. $\emptyset \subset E$
6. $\{\emptyset\} \subset E$
7. $\{x, y\} \subset E$
8. $\{y, z\} \subset E \setminus \{x\}$

Exercice 27 Écrire en compréhension les ensembles ci-dessous notés A , B , C et D respectivement.

1. l'ensemble des fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de période $T > 0$ donnée ;
2. l'ensemble des fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
3. l'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
4. l'ensemble des fonctions qui ne sont pas strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$.

6 Ensemble des parties d'un ensemble

Exercice 28 Soient E et F deux ensembles. Montrer que :

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F) \iff E = F$$

Exercice 29 Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Vrai ou faux ? Justifier.

1. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;
2. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Exercice 30 Soient a et b deux éléments distincts d'un ensemble E . Expliciter les ensembles $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a, b\}))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

7 Démontrer avec des ensembles

Exercice 31 On considère les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$A = \left\{ \frac{\lambda}{k(k+1)} \mid k \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lambda \in \{-1, 1\} \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Étudier les inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$.

Indication : justifier qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

Exercice 32 Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Exercice 33 Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

$$(E \setminus A) \setminus (E \setminus B) = B \setminus A$$

Exercice 34 Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E . Justifier les équivalences suivantes :

1. $A \subset B \iff A \cup B = B$;
2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$;
3. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$;
4. $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C$;
5. $A \subset B \implies \overline{B} \subset \overline{A}$.

Exercice 35 (différence symétrique) Soient A et B deux parties d'un ensemble E . On appelle *différence symétrique* de A et B , notée $A \Delta B$, l'ensemble :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Montrer que :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Exercice 36 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . On définit la différence symétrique de A et B par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Montrer que :

1. $A \Delta B = A \Delta C \iff B = C$;
2. $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$;
3. $A \Delta B = A \cap B \implies A = B = \emptyset$.

Exercice 37 (produit cartésien) Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que :

$$(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$$

Exercice 38 (simplifications ensemblistes) Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . Simplifier l'écriture des ensembles suivants.

1. $W = A \cup (\overline{A} \cap B)$
2. $X = A \cap (\overline{A} \cup B)$
3. $Y = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$
4. $Z = \overline{A \cup B \cup \overline{C}} \cap (A \cap \overline{B})$

Exercice 39 Soient X, Y et Z trois sous-ensembles d'un ensemble E .

1. Montrer que :

$$(X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z),$$

2. Montrer que :

$$(X \cup Y) \cap (Y \cup Z) \cap (X \cup Z) = (X \cap Y) \cup (Y \cap Z) \cup (X \cap Z)$$

8 Divers

Exercice 40 (fonctions indicatrices) Soit A une partie d'un ensemble E . On appelle *fonction indicatrice* de la partie A , l'application $\mathbf{1}_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles les fonctions indicatrices ?

- | | | |
|---------------------------------------|---|---------------------------------------|
| 1. $\min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$ | 2. $\max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$ | 3. $\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$ |
| 4. $1 - \mathbf{1}_A$ | 5. $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$ | 6. $(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2$ |

où $1 - \mathbf{1}_A$ désigne la fonction $x \in E \mapsto 1 - \mathbf{1}_A(x)$

Exercice 41 (un entier est soit pair, soit impair) On considère les deux sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ suivants :

$$\mathcal{P} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I} = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

Exercice 42 (équations ensemblistes) Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

1. Résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.
2. Résoudre l'équation $A \cap X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.