

LOGIQUE ET RAISONNEMENT

(corrigés)

Exercice 1

1. C'est faux. Le nombre réel $x = \frac{3}{2}$ est tel que $2 < x < 3$.
2. C'est faux. Les nombres $x = -1 \in \mathbb{R}^*$ et $y = 1 \in \mathbb{R}^*$ sont tels que $x < y$ et :

$$-1 = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} = 1$$

3. C'est vrai. Le nombre $x = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}_+$ convient. En effet, $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

Remarque : on peut en fait montrer que tout nombre $x \in]0, 1[$ convient.

4. C'est vrai. Démontrons-le en raisonnant par contraposition. Soient $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
On suppose que $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x'+1}{x'-1}$. Montrons que $x = x'$. Comme $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x'+1}{x'-1}$, un produit en croix nous donne :

$$(x+1)(x'-1) = (x'+1)(x-1) \quad i.e. \quad xx' - x + x' - 1 = xx' - x' + x - 1,$$

ce qui nous donne l'égalité $2x = 2x'$ puis $x = x'$. Ainsi, on vient de montrer que :

$$x \neq x' \implies \frac{x+1}{x-1} \neq \frac{x'+1}{x'-1}$$

5. C'est vrai. Soit en effet $N \in \mathbb{N}^*$. Le choix $n = N \in \mathbb{N}^*$ convient car :

$$\sum_{k=1}^N k = \underbrace{1 + 2 + \dots + (N-1)}_{\geq 0} + N \geq N$$

6. C'est faux. En effet, pour $x = -1 < 0$, on a $x^2 + x = 0 \geq 0$.

Remarque : en fait, le produit $x^2 + x = x(x+1)$ est positif si (et seulement si) $x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$ (il suffit de faire un tableau de signes).

Exercice 2

1. $\exists T \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$
2. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$

3. $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C$ (ou : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$)
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
5. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(x_0)$
6. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x_M \in \mathbb{R}, f(x_M) \geq M$
7. $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0)$ ou $(\exists ! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$

Exercice 3

1. $\exists x \in I, f(x) = 0$
2. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \neq y$
3. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, |f(x)| > M$
4. $\exists x, y \in I, x \leq y$ et $f(x) > f(y)$
5. $\exists x, y \in I, f(x) = f(y)$ et $x \neq y$
6. $\exists x \in I, f(x) > 0$ et $x > 0$

Exercice 4 (raisonnement direct)

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{x^2 + y^2}{2} - xy = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{2} = \frac{(x-y)^2}{2} \geq 0$$

car $(x-y)^2 \geq 0$ et $2 > 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}}$$

2. Soient $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$x^n - x^{n+1} = x^n(1-x)$$

Or $x \in [0, 1]$ donc $0 \leq x^n \leq 1$ et $0 \leq 1-x \leq 1$ (car $-1 \leq -x \leq 0$ puis $0 \leq 1-x \leq 1$).
Par produit, il vient $0 \leq x^n(1-x) \leq 1$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x^n - x^{n+1} \leq 1}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'expression conjuguée, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\end{aligned}$$

Or $n+1 > n \geq 0$ donc $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ (par croissance stricte de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$) donc :

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n} > 0$$

La fonction inverse décroît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$. On procède de la même manière pour obtenir la deuxième inégalité. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}}$$

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b} &\leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \iff a+b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ &\iff a+b \leq a+2\sqrt{a}\sqrt{b} \\ &\iff 0 \leq 2\sqrt{a}\sqrt{b}\end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie (car $2 \geq 0$, $\sqrt{a} \geq 0$ et $\sqrt{b} \geq 0$) donc, par équivalence, la première inégalité est vraie. Ainsi :

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

5. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 2 + \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

D'après la question 1., on a $a^2 + b^2 \geq 2ab$ donc, en divisant par $ab > 0$, il vient $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$. Finalement :

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4}$$

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{Z}$. On distingue deux cas suivant la parité de n .

★ **Premier cas** : n est pair

Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Ainsi :

$$n^3 - n + 2024 = (2k)^3 - 2k + 2024 = 8k^3 - 2k + 2024 = 2(\underbrace{4k^3 - k + 1012}_{\in \mathbb{Z}})$$

donc $n^3 - n + 2024$ est pair.

★ **Deuxième cas** : n est impair

Il existe ici $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors :

$$\begin{aligned}n^3 - n + 2024 &= (2k+1)^3 - (2k+1) + 2024 \\ &= (2k+1)[(2k+1)^2 - 1] + 2024 \\ &= (2k+1)(4k^2 + 4k) + 2024 \\ &= 2(2k+1)(2k^2 + 2k) + 2 \times 1012 \\ &= 2(\underbrace{(2k+1)(2k^2 + 2k) + 1012}_{\in \mathbb{Z}})\end{aligned}$$

donc $n^3 - n + 2024$ est un entier pair.

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, \text{ l'entier } n^3 - n + 2024 \text{ est pair}}$$

Exercice 6 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{si } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1-x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On distingue deux cas suivant l'expression de $|x-1|$.

★ **Premier cas** : $x \geq 1$

Alors :

$$x^2 - x + 1 \geq |x-1| \iff x^2 - x + 1 \geq x-1 \iff x^2 - 2x + 2 \geq 0$$

La dernière inégalité est vraie (elle l'est même pour tout $x \in \mathbb{R}$ car le discriminant du trinôme vaut $-4 < 0$ et car le coefficient dominant du trinôme est positif).

★ **Deuxième cas** : $x < 1$

On a :

$$x^2 - x + 1 \geq |x-1| \iff x^2 - x + 1 \geq 1-x \iff x^2 \geq 0$$

La dernière inégalité est vraie donc la première l'est également.

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x + 1 \geq |x - 1|$$

Exercice 7 Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a ou bien $x \leq y$ ou bien $x > y$. On distingue deux cas.

★ **Premier cas : $x \leq y$**

On a alors $\max(x, y) = y$. De plus, $x - y \leq 0$ donc :

$$|x - y| = -(x - y) = y - x$$

Ainsi :

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + y - x}{2} = y = \max(x, y)$$

★ **Deuxième cas : $x > y$**

Ici, $\max(x, y) = x$ et $x - y > 0$ donc $|x - y| = x - y$ et :

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + x - y}{2} = x = \max(x, y)$$

Finalement :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

Remarque : de la même manière, on peut montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

Exercice 8

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |x| \leq \varepsilon \quad (*)$$

Raisonne par l'absurde en supposant que $x \neq 0$. Posons $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$. On a $\varepsilon > 0$ (car $x \neq 0$) donc, d'après (*), on a l'inégalité :

$$|x| \leq \frac{|x|}{2} \quad i.e. \quad \frac{|x|}{2} \leq 0,$$

soit encore $|x| = 0$ (car $|x| \geq 0$). Par conséquent, $x = 0$, ce qui est absurde. Finalement, $x = 0$. Par conséquent :

$$(\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \implies x = 0$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On démontre l'implication en raisonnant par contraposition. Il s'agit donc de montrer que :

$$(xy - x - y = 1) \implies (x = 1 \text{ ou } y = 1)$$

Supposons que $xy - x - y = 1$. Alors $xy - x - y - 1 = 0$, i.e. $(x - 1)(y - 1) = 0$. Autrement dit, $x - 1 = 0$ ou $y - 1 = 0$, i.e. $x = 1$ ou $y = 1$. Ainsi :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \implies (xy - x - y \neq 1)$$

3. Remarques :

- Un entier naturel n est un multiple de 6 si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k$.
- De manière générale, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n = 6k \quad \text{ou} \quad n = 6k + 1 \quad \text{ou} \quad n = 6k + 2 \quad \text{ou} \quad n = 6k + 3 \quad \text{ou} \quad n = 6k + 4 \quad \text{ou} \quad n = 6k + 5.$$

- Ainsi, dire que $n \in \mathbb{N}$ n'est pas un multiple de 6 signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n = 6k + 1 \quad \text{ou} \quad n = 6k + 2 \quad \text{ou} \quad n = 6k + 3 \quad \text{ou} \quad n = 6k + 4 \quad \text{ou} \quad n = 6k + 5$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On démontre l'équivalence en raisonnant par double implication.

- ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n est un multiple de 6. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k$. Ainsi :

$$n^2 = (6k)^2 = 36k^2 = 6 \times \underbrace{6k^2}_{\in \mathbb{N}}$$

donc n^2 est un multiple de 6.

- ★ On veut maintenant montrer que :

$$(n^2 \text{ est un multiple de } 6) \implies (n \text{ est un multiple de } 6)$$

On démontre cette implication en raisonnant par contraposition. Montrons donc que :

$$(n \text{ n'est pas un multiple de } 6) \implies (n^2 \text{ n'est pas un multiple de } 6)$$

Supposons donc que n n'est pas un multiple de 6. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n = 6k + 1 \quad \text{ou} \quad n = 6k + 2 \quad \text{ou} \quad n = 6k + 3 \quad \text{ou} \quad n = 6k + 4 \quad \text{ou} \quad n = 6k + 5$$

On procède maintenant par disjonction de cas.

— Si $n = 6k + 1$, alors :

$$n^2 = (6k + 1)^2 = 36k^2 + 12k + 1 = 6(\underbrace{6k^2 + 2k}_{\in \mathbb{N}}) + 1$$

donc n^2 n'est pas un multiple de 6.

— Si $n = 6k + 2$, alors :

$$n^2 = (6k + 2)^2 = 36k^2 + 24k + 4 = 6(\underbrace{6k^2 + 4k}_{\in \mathbb{N}}) + 4$$

donc n^2 n'est pas un multiple de 6.

— Si $n = 6k + 3$, alors :

$$n^2 = (6k + 3)^2 = 36k^2 + 36k + 9 = 6(\underbrace{6k^2 + 6k + 1}_{\in \mathbb{N}}) + 3$$

donc n^2 n'est pas un multiple de 6.

— Si $n = 6k + 4$, alors :

$$n^2 = (6k + 4)^2 = 36k^2 + 48k + 16 = 6(\underbrace{6k^2 + 8k + 2}_{\in \mathbb{N}}) + 4$$

donc n^2 n'est pas un multiple de 6.

— Si $n = 6k + 5$, alors :

$$n^2 = (6k + 5)^2 = 36k^2 + 60k + 25 = 6(\underbrace{6k^2 + 10k + 4}_{\in \mathbb{N}}) + 1$$

donc n^2 n'est pas un multiple de 6.

Quelque soit le cas, n^2 n'est pas multiple de 6.

On peut donc conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n^2 \text{ est un multiple de } 6) \iff (n \text{ est un multiple de } 6)$$

Exercice 9 Soit $x \in \mathbb{Q}$. Montrons que $x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $x + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $x + \sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Comme

$x \in \mathbb{Q}$, il existe aussi $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $x = \frac{a}{b}$. Ainsi :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} - x = \frac{p}{q} - \frac{a}{b} = \frac{bp - aq}{bq}$$

Comme $bp - aq \in \mathbb{Z}$ et $bq \in \mathbb{Z}^*$, on peut conclure que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Finalement, $x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}, \quad x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$$

Exercice 10 On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe un polynôme P à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = P(x)$$

Il existe $n \in \mathbb{N}$ et des nombres réels $a_0, \dots, a_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

En dérivant $n + 1$ fois cette égalité, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = 0,$$

ce qui est absurde (par exemple car $e^0 = 1 \neq 0$). Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction exponentielle n'est pas une fonction polynomiale}}$$

Exercice 11

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. On utilise une récurrence double.

★ On a :

$$x^0 + \frac{1}{x^0} = 2 \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x^1 + \frac{1}{x^1} = x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \text{ (hypothèse)}$$

La propriété est donc vraie pour $n \in \{0, 1\}$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ et $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$. Montrons que

$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} \in \mathbb{Z}$. On remarque que :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) = x^{n+2} + \frac{1}{x^n} + x^n + \frac{1}{x^{n+2}}$$

donc :

$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)$$

Or, par hypothèse, on a $x + \frac{1}{x}, x^n + \frac{1}{x^n}, x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$. De plus, un produit d'entiers est un entier, et une différence d'entiers est un entier. On en déduit que $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} \in \mathbb{Z}$. La propriété est donc vraie au rang $n + 2$.

Par principe de récurrence double, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} = -3 &\iff x^2 + 1 = -3x \iff x^2 + 3x + 1 = 0 \\ &\iff x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{le nombre réel } x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \text{ n'est pas un entier et est tel que } x + \frac{1}{x} = -3 \in \mathbb{Z}}$$

Exercice 12 En calculant les premières valeurs de $(n+1)!$ et de 2^n (pour $n=0$, $n=1$, $n=2$ et $n=3$ par exemple), on émet la conjecture suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \leq (n+1)!$$

Pour le démontrer, procédons par récurrence simple.

- ★ On a $2^0 = 1$ et $(0+1)! = 1! = 1$ donc $2^0 \leq (0+1)!$. L'inégalité est donc vérifiée au rang $n=0$.
- ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $2^n \leq (n+1)!$. Montrons que $2^{n+1} \leq (n+2)!$. Comme $2^n \leq (n+1)!$, on a en multipliant par $2 \geq 0$:

$$2 \times 2^n \leq 2(n+1)! \quad i.e. \quad 2^{n+1} \leq 2(n+1)!$$

Il s'agit maintenant de vérifier que $2(n+1)! \leq (n+2)!$. Or :

$$\begin{aligned} (n+2)! - 2(n+1)! &= (n+2)(n+1)! - 2(n+1)! = [(n+2) - 2](n+1)! \\ &= n \times (n+1)! \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car $n \geq 0$ et $(n+1)! \geq 0$. Ainsi :

$$(n+2)! - 2(n+1)! \geq 0 \quad i.e. \quad 2(n+1)! \leq (n+2)!$$

On peut donc conclure que $2^{n+1} \leq (n+2)!$. L'inégalité est donc vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \leq (n+1)!}$$

Exercice 13

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est également. On a :

$$8^{n+1} + 1 = 8 \times 8^n + 1 = 8(8^n + 1) - 7$$

Par hypothèse, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $8^n + 1 = 7k$. Par conséquent :

$$8^{n+1} + 1 = 8 \times (7k) - 7 = 7 \underbrace{(8k - 1)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Donc $8^{n+1} + 1$ est divisible par 7. Autrement dit, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Finalement :

$$\boxed{\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}}$$

2. On ne peut rien en déduire car la propriété n'est pas initialisée (en effet, $8^0 + 1 = 2$ n'est pas divisible par 7). En fait, on peut montrer qu'aucune des propositions $\mathcal{P}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) n'est vraie (on sera en mesure de le montrer dès lors qu'on en saura plus sur la notion de divisibilité).

Exercice 14

1. Le discriminant du polynôme $X^2 - X - 3$ vaut $(-1)^2 - 4 \times (-3) = 13 > 0$. Ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{le polynôme } X^2 - X - 3 \text{ admet deux racines réelles distinctes qui sont } \alpha = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \\ &\text{et } \beta = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \end{aligned}}$$

2. Comme $\alpha \neq \beta$, l'expression à droite de l'égalité proposée a bien un sens. On utilise une récurrence double.

★ On a $\alpha^0 = \beta^0 = 1$ donc :

$$\frac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta} = 0 = u_0 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1 = u_1$$

Les égalités sont donc vérifiées pour $n \in \{0, 1\}$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a les égalités :

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

Montrons que $u_{n+2} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta}$. D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite, on a :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n$$

On utilise maintenant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + 3 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n(\alpha + 3) - \beta^n(\beta + 3)}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

Par définition de α , on a $\alpha^2 - \alpha - 3 = 0$, i.e. $\alpha + 3 = \alpha^2$. De la même manière, on a $\beta + 3 = \beta^2$. Ainsi :

$$u_{n+2} = \frac{\alpha^n \times \alpha^2 - \beta^n \times \beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n + 2$.

Par principe de récurrence double, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}}$$

Exercice 15 On conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad p_n = \frac{1}{n}$$

Démontrons ce résultat à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

★ On a :

$$p_2 = \prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

L'égalité est donc vérifiée pour $n = 2$.

★ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On suppose que $p_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$. Alors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \left(\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \right) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = p_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{(n+1) - 1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad p_n = \frac{1}{n}}$$

Exercice 16 (inégalité de Bernoulli) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons l'inégalité à l'aide d'une récurrence simple.

★ On a $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$ donc l'inégalité est vraie pour $n = 0$ (il s'agit même d'une égalité).

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Montrons que $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$. On a :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$$

Or $(1+x)^n \geq 1 + nx$ par hypothèse de récurrence et $1+x \geq 0$ (car $x \geq 0$) donc :

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\geq (1+x)(1+nx) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

L'inégalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geq 1 + nx}$$

Remarque : on peut se passer d'une récurrence en étudiant les variations de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n - 1 - nx$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 17 On utilise une récurrence simple.

★ On a $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times (1+1)} = \frac{1}{2}$. L'égalité est donc vérifiée pour $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. Montrons que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{k=n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Exercice 18 On a :

$$u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

De même, le calcul nous donne $u_4 = \frac{1}{4}$. À l'aide d'une récurrence simple, montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n}$$

★ On a $u_1 = 1 = \frac{1}{1}$. L'égalité est donc vraie au rang $n=1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u_n = \frac{1}{n}$. Montrons que $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite, on a $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. On utilise maintenant l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n}}$$

Exercice 19 On utilise une récurrence simple.

★ On a $(1+\sqrt{2})^0 = 1 = 1+0 \times \sqrt{2}$. Ainsi, en posant $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, on a $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$ et l'égalité $(1+\sqrt{2})^0 = a_0 + b_0\sqrt{2}$. La propriété est donc vérifiée pour $n=0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe des entiers naturels a_n et b_n tels que l'on ait l'égalité $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Montrons alors qu'il existe $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{N}$ tels que $(1+\sqrt{2})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}$. On a :

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{2})^{n+1} &= (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n = (1+\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) \\ &= a_n + b_n\sqrt{2} + a_n\sqrt{2} + 2b_n \\ &= (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

Posons alors $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$. Une somme d'entiers naturels étant un entier naturel, on a $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{N}$. Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n, b_n \in \mathbb{N}, \quad (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}}$$

Exercice 20 On utilise une récurrence double.

★ On a :

$$a_2 = a_1 + \frac{a_0}{0+1} = 1+1=2$$

On a $1 \leq 1 \leq 1^2$ et $1 \leq 2 \leq 2^2 = 4$ donc les inégalités sont vérifiées aux rangs $n \in \{1, 2\}$.

- ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $1 \leq a_n \leq n^2$ et $1 \leq a_{n+1} \leq (n+1)^2$. Montrons alors que $1 \leq a_{n+2} \leq (n+2)^2$. Pour la minoration, on a :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+1} \geq 1 + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq 0} \geq 1$$

Pour la majoration, on a encore en utilisant la majoration des nombres a_n et a_{n+1} et le fait que $\frac{1}{n+1} \geq 0$:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\leq (n+1)^2 + \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)^3 + n^2}{n+1} \\ &= \dots \\ &= \frac{n^3 + 4n^2 + 3n + 1}{n+1} \end{aligned}$$

Pour montrer que $a_{n+2} \leq (n+2)^2$, il suffit de montrer que :

$$\frac{n^3 + 4n^2 + 3n + 1}{n+1} \leq (n+2)^2$$

Or :

$$\begin{aligned} (n+2)^2 - \frac{n^3 + 4n^2 + 3n + 1}{n+1} &= \frac{(n+2)^2(n+1) - n^3 - 4n^2 - 3n - 1}{n+1} \\ &= \frac{(n^2 + 4n + 4)(n+1) - n^3 - 4n^2 - 3n - 1}{n+1} \\ &= \frac{n^3 + 5n^2 + 8n + 4 - n^3 - 4n^2 - 3n - 1}{n+1} \\ &= \frac{n^2 + 5n + 3}{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

comme quotient de nombres positifs. Finalement, on a :

$$a_{n+2} \leq \frac{n^3 + 4n^2 + 3n + 1}{n+1} \leq (n+2)^2$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n+2$.

Par principe de récurrence double, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq a_n \leq n^2}$$

Exercice 21 On utilise une récurrence forte.

- ★ On a $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$ et $0 \in \mathbb{N}$ donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

- ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que, pour tout entier $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $m = 2^p(2q+1)$. Montrons que la proposition est vraie pour l'entier $n+1$, *i.e.* que :

$$\exists p, q \in \mathbb{N}, \quad n+1 = 2^p(2q+1)$$

On distingue deux cas.

— **Premier cas** : $n+1$ est impair

Il existe alors $q \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2q+1$ et donc $n+1 = 2^0(2q+1)$.

— **Deuxième cas** : $n+1$ est pair

Il existe alors $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 = 2k$. On a $k = \frac{n+1}{2}$ donc $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'hypothèse de récurrence appliquée à l'entier k nous donne l'existence de deux entiers naturels p et q tels que $k = 2^p(2q+1)$. On en déduit que $n+1 = 2^{p+1}(2q+1)$.

Finalement, la propriété est vraie pour l'entier $n+1$.

Par principe de récurrence forte, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p, q \in \mathbb{N}, \quad n = 2^p(2q+1)}$$

Exercice 22 Déterminer les solutions de l'équation en raisonnant par analyse-synthèse.

- ★ **Analyse** : supposons que $x \in \mathbb{R}$ soit solution de l'équation. En élevant au carré, on a $2 - x = x^2$, *i.e.* $x^2 + x - 2 = 0$. Autrement dit, $x = 1$ ou $x = -2$.

- ★ **Synthèse** : on a $\sqrt{2-1} = 1$ et $\sqrt{2-(-2)} = 2 \neq -2$.

Finalement :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation dans } \mathbb{R} \text{ est } \{1\}}$$

Exercice 23 On utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

- ★ **Analyse** : supposons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit une fonction impaire sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction $g : x \mapsto f(x) - 1$ soit paire. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, on a $f(-x) = -f(x)$ et :

$$g(-x) = g(x) \quad \text{i.e.} \quad f(-x) - 1 = f(x) - 1 \quad \text{soit encore} \quad f(-x) = f(x)$$

En soustrayant membre à membre dans les égalités :

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x),$$

on obtient $-2f(x) = 0$ puis $f(x) = 0$. Ainsi, f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

★ **Synthèse** : la fonction nulle $\theta : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 0 \end{cases}$ est impaire sur $\mathbb{R}$ car ($\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \theta(-x) = 0 = -\theta(x)$$

et la fonction $x \mapsto \theta(x) - 1$ (fonction constante égale à -1) est paire sur $\mathbb{R}$.

Finalement :

il existe une et une seule fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ impaire sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction $x \mapsto f(x) - 1$ soit paire : la fonction nulle

Exercice 24 On raisonne par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : supposons que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f(y) = 3f(x - y)$$

En remplaçant x et y par 0, on obtient $2f(0) = 3f(0)$, *i.e.* $f(0) = 0$. Ensuite, en remplaçant y par 0 dans l'équation fonctionnelle, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \underbrace{f(0)}_{=0} = 3f(x) \quad \text{i.e.} \quad f(x) = 0$$

Autrement dit, f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

★ **Synthèse** : la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, notée θ , est telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \theta(x) = \theta(y) = \theta(x - y) = 0$$

donc :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \theta(x) + \theta(y) = 3\theta(x - y) = 0$$

La fonction θ est donc une solution de l'équation fonctionnelle proposée sur $\mathbb{R}$.

Finalement :

la fonction nulle est la seule solution de l'équation fonctionnelle sur $\mathbb{R}$

Exercice 25 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On raisonne par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : supposons qu'il existe deux fonctions $d \in \mathcal{A}$ et $g \in \mathcal{B}$ telles que $f = d + g$. Comme $d \in \mathcal{A}$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad d(x) = ax + b$$

L'égalité $f = d + g$ se réécrit donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b + g(x)$$

Or $g \in \mathcal{B}$ donc $g(0) = g'(0) = 0$. En choisissant la valeur $x = 0$ dans l'identité précédente, on obtient :

$$f(0) = a \times 0 + b + g(0) \quad \text{i.e.} \quad b = f(0)$$

Par ailleurs, en dérivant la relation (ce qui est licite puisque les fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = a + g'(x)$$

puis, en évaluant en $x = 0$:

$$f'(0) = a + g'(0) \quad \text{i.e.} \quad a = f'(0)$$

Les fonctions d et g sont donc uniquement déterminées ; il s'agit des fonctions :

$$d : x \mapsto f'(0)x + f(0) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto f(x) - d(x) = f(x) - f'(0)x - f(0)$$

★ **Synthèse** : considérons les fonctions

$$d : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f'(0)x + f(0) \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) - f'(0)x - f(0) \end{cases}$$

Alors on a bien $f = d + g$. De plus, d est clairement une fonction affine (*i.e.* $d \in \mathcal{A}$) et il reste à vérifier que g appartient à $\mathcal{B}$. Tout d'abord, $g(0) = f(0) - f'(0) \cdot 0 - f(0) = 0$. De plus, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f'(x) - f'(0)$$

donc $g'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$. Ainsi, on a bien $g \in \mathcal{B}$. Ceci démontre l'existence de la décomposition de f comme la somme d'une fonction de $\mathcal{A}$ et d'une fonction de $\mathcal{B}$.

Ainsi :

toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction de $\mathcal{A}$ et d'une fonction de $\mathcal{B}$

Exercice 26

1. *Vrai* : x est bien un élément de E .
2. *Faux* : $\{x\}$ est un ensemble, alors que E est un ensemble de réels. L'ensemble E ne peut donc pas contenir d'ensemble.

Remarque : pour rendre l'assertion vraie, il faudrait écrire « $\{x\} \subset E$ ».

3. *Vrai*.

4. *Faux* : l'ensemble vide n'est pas un élément de E (les éléments de E sont des nombres réels).
5. *Vrai* : l'ensemble vide est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble.
6. *Faux* : cela signifierait que l'ensemble vide est un élément de E .
7. *Vrai* : en effet, x et y sont des éléments de E .
8. *Vrai* : car x , y et z sont deux à deux distincts.

Exercice 27

1. $A = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$
2. $B = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \exists T \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$
3. $C = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b\}$
4. $D = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \exists x, y \in \mathbb{R}, x < y \text{ et } f(x) \geq f(y)\}$

Exercice 28

On raisonne par double implication.

- ★ Si $E = F$, alors il est clair que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$.
- ★ Réciproquement, supposons que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$. Montrons alors l'égalité $E = F$ en raisonnant par double inclusion.
 - Montrons que $E \subset F$. Par définition de $\mathcal{P}(E)$, on a $E \in \mathcal{P}(E)$ (puisque E est une partie de E) donc (d'après notre hypothèse) $E \in \mathcal{P}(F)$, ce qui signifie que $E \subset F$.
 - Les ensembles E et F jouant des rôles symétriques, on a également $F \subset E$.

Par double inclusion, on a donc $E = F$.

Finalement :

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F) \iff E = F$$

Exercice 29

1. *Vrai*. On le démontre en raisonnant par double inclusion.
 - ★ Montrons que $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Soit $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Alors $X \subset A \cap B$ (par définition de l'ensemble des parties d'un ensemble). On a donc $X \subset A$ et $X \subset B$. Autrement dit, $X \in \mathcal{P}(A)$ et $X \in \mathcal{P}(B)$, i.e. $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Ainsi, on a bien l'inclusion $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
 - ★ Montrons que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$. Soit $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Alors $X \in \mathcal{P}(A)$ et $X \in \mathcal{P}(B)$, ce qui signifie que $X \subset A$ et $X \subset B$. On a donc l'inclusion $X \subset A \cap B$, i.e. $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. D'où l'inclusion $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$.

Par double inclusion, on a montré que :

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

2. *C'est faux en général*. Fournissons un contre-exemple. Dans $E = \mathbb{R}$, considérons les sous-ensembles $A = \mathbb{R}_-$ et $B = \mathbb{R}_+$. Alors $A \cup B = \mathbb{R}$. La partie $X = \mathbb{R}$ est donc une partie de $\mathbb{R} = A \cup B$ (i.e. $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$), mais X n'est ni une partie de $\mathbb{R}_- = A$, ni une partie de $B = \mathbb{R}_+$ (i.e. $X \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$). Donc $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Remarque : par contre, on peut vérifier qu'on a toujours l'inclusion

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$$

Exercice 30

1. On a $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$ puis :

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \mathcal{P}(\{a\})\}$$

2. On a $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ puis :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a, b\})) = & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a, b\}\}, \\ & \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a, b\}\}, \\ & \{\{b\}, \{a, b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}, \\ & \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \mathcal{P}(\{a, b\})\} \end{aligned}$$

3. On a $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ donc :

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Exercice 31

Montrons que A est inclus dans B mais que B n'est pas inclus dans A .

- ★ Soit $a \in A$. Il existe $\lambda \in \{-1, 1\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$a = \frac{\lambda}{k(k+1)} = \lambda \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \lambda \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{\lambda}{k} - \frac{\lambda}{k+1}$$

- Si $\lambda = 1$, alors $a = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Comme $k, k+1 \in \mathbb{N}^*$, on a $a \in B$.
- Sinon, $\lambda = -1$ et alors $a = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$. Comme $k, k+1 \in \mathbb{N}^*$, on a $a \in B$.

Ainsi, $a \in B$. Finalement, on a l'inclusion :

$$\boxed{A \subset B}$$

★ Pour montrer que B n'est pas inclus dans A , il suffit de trouver un élément de B qui n'appartient pas à A . Considérons (par exemple) l'élément $b = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ de B . Montrons que b n'appartient pas à A en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $\lambda \in \{-1, 1\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $b = \frac{\lambda}{k(k+1)}$. Comme $b > 0$, on a nécessairement $\lambda = 1$. On a donc :

$$b = \frac{1}{4} = \frac{1}{k(k+1)} \quad i.e. \quad 4 = k(k+1)$$

Par conséquent, k est un diviseur positif de 4. On en déduit que $k \in \{1, 2, 4\}$ et alors :

- si $k = 1$, alors $k(k+1) = 2 \neq 4$;
- si $k = 2$, alors $k(k+1) = 6 \neq 4$;
- et si $k = 4$, alors $k(k+1) = 20 \neq 4$.

On obtient donc une absurdité. Ainsi, $b = \frac{1}{4}$ n'appartient pas à A . Finalement :

$$\boxed{\text{l'ensemble } B \text{ n'est pas inclus dans } A}$$

Exercice 32 *Rappel* : Si X et Y sont deux parties d'un ensemble E , alors :

$$X \setminus Y = \{x \in E \mid x \in X \text{ et } x \notin Y\} = X \cap \overline{Y}$$

Ainsi :

$$A \setminus (B \cap C) = A \cap \overline{B \cap C} = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$$

d'après les lois de De Morgan. En appliquant ensuite la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, on a :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}),$$

i.e. :

$$\boxed{A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)}$$

Exercice 33 On a (*cf.* rappel au début de l'exercice 7) :

$$\begin{aligned} (E \setminus A) \setminus (E \setminus B) &= \overline{A} \cap \overline{E \setminus B} = \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} \\ &= \overline{A} \cap B \\ &= B \cap \overline{A}, \end{aligned}$$

soit encore :

$$\boxed{(E \setminus A) \setminus (E \setminus B) = B \setminus A}$$

Exercice 34

1. On raisonne par double implication.

★ On suppose que $A \subset B$. Montrons que $A \cup B = B$ en raisonnant par double inclusion.

— On a toujours $B \subset A \cup B$.

— Montrons maintenant que $A \cup B \subset B$. Soit $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, alors $x \in B$ d'après l'hypothèse (à savoir $A \subset B$), et si $x \in B$, il n'y a rien à démontrer. On a donc l'inclusion $A \cup B \subset B$.

Par double inclusion, on a bien l'égalité $A \cup B = B$.

★ On suppose que $A \cup B = B$. Montrons que $A \subset B$. Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$ (puisque $A \subset A \cup B$) donc $x \in B$ d'après l'hypothèse (à savoir $A \cup B = B$). On a donc l'inclusion $A \subset B$.

Finalement :

$$\boxed{A \subset B \iff A \cup B = B}$$

2. On raisonne par double implication.

★ Supposons que $A = B$. Alors :

$$A \cap B = A \cap A = A \quad \text{et} \quad A \cup B = A \cup A = A$$

donc $A \cap B = A \cup B$.

★ Supposons que $A \cap B = A \cup B$. Montrons que $A = B$ en raisonnant par double inclusion.

— Montrons que $A \subset B$. Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$ (puisque $A \subset A \cup B$) donc $x \in A \cap B$ (puisque $A \cup B = A \cap B$ par hypothèse) donc $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$.

— Les ensembles A et B jouant des rôles symétriques, on a aussi $B \subset A$.

Finalement :

$$\boxed{A = B \iff A \cap B = A \cup B}$$

3. On raisonne par double implication.

★ Supposons que $A \cup B = A \cap C$. Montrons que $B \subset A \subset C$.

— Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$ (puisque $B \subset A \cup B$). Comme $A \cup B = A \cap C$, on a $x \in A \cap C$ donc $x \in A$. Ainsi, $B \subset A$.

— Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$ (puisque $A \subset A \cup B$) donc $x \in A \cap C$ donc $x \in C$. Ainsi, $A \subset C$.

On a donc bien $B \subset A \subset C$.

★ Supposons maintenant que $B \subset A \subset C$. Montrons que $A \cup B = A \cap C$ en raisonnant par double implication.

— On a $A \cap C \subset A$ et $A \subset A \cup B$ donc, par transitivité de la relation $\subset$, on a $A \cap C \subset A \cup B$.

— Montrons que $A \cup B \subset A \cap C$. Soit $x \in A \cup B$.

- Si $x \in A$, alors $x \in C$ (puisque $A \subset C$) donc $x \in A \cap C$.
- Si $x \in B$, alors $x \in A$ et donc $x \in C$ (puisque $B \subset A \subset C$) donc $x \in A \cap C$.

On a donc l'inclusion $A \cup B \subset A \cap C$.

Par double inclusion, on a bien l'égalité $A \cup B = A \cap C$.

Finalement :

$$A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$$

4. On raisonne par double implication.

★ Supposons que $B = C$. Alors il est clair que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

★ Supposons que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrons alors que $B = C$ en raisonnant par double inclusion.

— Montrons que $B \subset C$. Soit $x \in B$. On distingue deux cas.

• **Premier cas :** $x \in A$

Alors $x \in A \cap B$ donc $x \in A \cap C$ (puisque $A \cap B = A \cap C$) donc $x \in C$.

• **Deuxième cas :** $x \notin A$

Alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cup C$ (puisque $A \cup B = A \cup C$) i.e. $x \in A$ ou $x \in C$. Comme $x \notin A$, on a nécessairement $x \in C$.

On a donc l'inclusion $B \subset C$.

— Les ensembles B et C jouant des rôles symétriques, on a aussi $C \subset B$.

Ainsi, par double inclusion on a bien l'égalité $B = C$.

Finalement :

$$\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C$$

Exercice 35 (différence symétrique) En utilisant les lois de De Morgan puis la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, on a :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= \underbrace{(A \cap \overline{A})}_{=\emptyset} \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup \underbrace{(B \cap \overline{B})}_{=\emptyset} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$

et donc, par définition de la différence symétrique,

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Exercice 36

1. On raisonne par double implication.

★ Supposons que $B = C$. Il est alors clair que $A \Delta B = A \Delta C$.

★ Supposons que $A \Delta B = A \Delta C$ et montrons que $B = C$ en raisonnant par double inclusion.

— Montrons que $B \subset C$. Soit $x \in B$. On distingue deux cas.

• **Premier cas :** $x \notin A$

On a $x \in B \setminus A$ donc $x \in A \Delta B$ (puisque $B \setminus A \subset A \Delta B$). Donc $x \in A \Delta C$, c'est-à-dire $x \in A \setminus C$ ou $x \in C \setminus A$. Comme $x \notin A$, on a $x \in C \setminus A$ et donc $x \in C$.

• **Deuxième cas :** $x \in A$

On a $x \in A \cap B$ donc $x \notin A \Delta B$ (par définition de la différence symétrique) donc $x \notin A \Delta C$. Comme $x \in A$, on a nécessairement $x \in C$ (en effet, si $x \notin C$, alors $x \in A \setminus C$ et alors $x \in A \Delta C$, ce qui est absurde).

Finalement, on a l'inclusion $B \subset C$.

— Comme B et C jouent des rôles symétriques, on a $C \subset B$.

Ainsi, on a (par double inclusion) l'égalité $B = C$.

Finalement :

$$A \Delta B = A \Delta C \iff B = C$$

2. On raisonne par double implication.

★ Supposons que $A \setminus B = A$. Alors :

$$B \setminus (A \setminus B) = B \setminus A \quad (*)$$

et on sait que (cf. rappel au début de l'exercice 7) :

$$\begin{aligned} B \setminus (A \setminus B) &= B \cap \overline{A \setminus B} = B \cap \overline{A \cap \overline{B}} \\ &= B \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \quad (\text{lois de De Morgan}) \\ &= B \cap (\overline{A} \cup B) \\ &= (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap B) \\ &= (B \cap \overline{A}) \cup B \\ &= B \end{aligned}$$

car $B \cap \overline{A} \subset B$. On a donc (en reprenant $(*)$) :

$$B = B \setminus A,$$

ce qu'il fallait démontrer.

★ On établit l'implication réciproque avec le même raisonnement (en échangeant les rôles de A et B).

3. On suppose que $A \Delta B = A \cap B$. Montrons que $A = \emptyset$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $A \neq \emptyset$ et considérons un élément a de A . On distingue deux cas.

★ **Premier cas** : $x \in B$

On a alors $x \in A \cap B$ et comme $A \cap B = A \Delta B$, on a :

$$x \in A \Delta B \quad i.e. \quad x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Autrement dit, $x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A$. En particulier, $x \notin B$ ou $x \notin A$, ce qui est absurde.

★ **Deuxième cas** : $x \notin B$

On a ici $x \in A \setminus B$ et comme $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, on a $x \in A \Delta B$. Mais $A \Delta B = A \cap B$ par hypothèse donc $x \in A \cap B$. En particulier, $x \in B$, ce qui est exclus.

On en déduit que $A = \emptyset$. Comme A et B jouent des rôles symétriques, on a aussi $B = \emptyset$. Finalement :

$$\boxed{A \Delta B = A \cap B \implies A = B = \emptyset}$$

Exercice 37 (produit cartésien)
inclusion.

On démontre l'égalité en raisonnant par double

★ Montrons que $(E \times G) \cup (F \times G) \subset (E \cup F) \times G$. Soit $(x, y) \in (E \times G) \cup (F \times G)$. On distingue deux cas.

— **Premier cas** : $(x, y) \in E \times G$.

Alors $x \in E$ donc $x \in E \cup F$ et $(x, y) \in (E \cup F) \times G$.

— **Deuxième cas** : $(x, y) \in F \times G$.

Alors $x \in F$ donc $x \in E \cup F$ et $(x, y) \in (E \cup F) \times G$.

Ceci montre l'inclusion annoncée.

★ Montrons que $(E \cup F) \times G \subset (E \times G) \cup (F \times G)$. Soit $(x, y) \in (E \cup F) \times G$. Alors $x \in E \cup F$ et $y \in G$ donc (on raisonne à nouveau par disjonction de cas) :

— si $x \in E$, alors $(x, y) \in E \times G$ et donc $(x, y) \in (E \times G) \cup (F \times G)$;

— si $x \in F$, alors $(x, y) \in F \times G$ et donc $(x, y) \in (E \times G) \cup (F \times G)$.

On a donc l'inclusion réciproque.

Par double inclusion, on a bien démontré l'égalité :

$$\boxed{(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G}$$

Exercice 38 (simplifications ensemblistes)

1. Par distributivité de la réunion par rapport à l'intersection, on a :

$$W = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) = E \cap (A \cup B) = A \cup B$$

2. Par distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, on a :

$$X = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

3. On a (même propriété) :

$$(A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cap (C \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cap E = A \cap \overline{B}$$

donc :

$$Y = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = A$$

4. D'après les lois de De Morgan, on a :

$$Z = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{\overline{C}}) \cap (A \cap \overline{B}) = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cap A \cap \overline{B}$$

par associativité de l'intersection. En utilisant enfin la commutativité de cette opération, on obtient :

$$Z = \underbrace{(\overline{A} \cap A)}_{=\emptyset} \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{B} = \emptyset$$

Exercice 39

1. Posons :

$$A = (X \cup Z) \cap (Y \cup \bar{Z}) \quad \text{et} \quad B = (X \cap \bar{Z}) \cup (Y \cap Z)$$

Par distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, on a :

$$\begin{aligned} A &= (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Z}) \cup (Z \cap Y) \cup \underbrace{(\bar{Z} \cap Z)}_{=\emptyset} \\ &= (X \cap Y) \cup \underbrace{(X \cap \bar{Z}) \cup (Y \cap Z)}_{=B} \end{aligned}$$

Pour montrer que $A = B$, il suffit donc de montrer que :

$$X \cap Y \subset B$$

Soit $x \in X \cap Y$. On raisonne par disjonction de cas.

★ **Premier cas** : $x \in Z$.

Alors $x \in Y$ et $x \in Z$ donc $x \in Y \cap Z$ et donc $x \in (X \cap \bar{Z}) \cup (Y \cap Z) = B$.

★ **Deuxième cas** : $x \notin Z$.

Alors $x \in X$ et $x \in \bar{Z}$ donc $x \in X \cap \bar{Z}$. Ainsi, $x \in (X \cap \bar{Z}) \cup (Y \cap Z) = B$.

On a donc bien montré l'inclusion $X \cap Y \subset B$. On conclut donc que :

$$\boxed{A = B}$$

2. Par distributivité de la réunion (respectivement de l'intersection) par rapport à l'intersection (respectivement de la réunion), on a :

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \cap (Y \cup Z) \cap (X \cup Z) &= [(X \cup Y) \cap (Z \cup Y)] \cap (X \cup Z) \\ &= [(X \cap Z) \cup Y] \cap (X \cup Z) \\ &= [(X \cap Z) \cap (X \cup Z)] \cup [Y \cap (X \cup Z)] \\ &= (X \cap Z) \cup (Y \cap X) \cup (Y \cap Z) \end{aligned}$$

car $X \cap Z \subset X \cup Z$. Ainsi :

$$\boxed{(X \cup Y) \cap (Y \cup Z) \cap (X \cup Z) = (X \cap Y) \cup (Y \cap Z) \cup (X \cap Z)}$$

Exercice 40 (fonctions indicatrices)

1. Soit $x \in E$. Une fonction indicatrice ne prend que les valeurs 0 ou 1 donc :

$$\begin{aligned} \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = 0 &\iff \mathbf{1}_A(x) = 0 \text{ ou } \mathbf{1}_B(x) = 0 \\ &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\iff x \in \bar{A} \cup \bar{B} \\ &\iff x \in \overline{A \cap B} \quad (\text{loi de De Morgan}) \\ &\iff \mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 0 \end{aligned}$$

et, comme la fonction $t \mapsto \min(\mathbf{1}_A(t), \mathbf{1}_B(t))$ ne prend que les valeurs 0 ou 1, on a aussi :

$$\min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = 1 \iff x \in A \cap B \iff \mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 1$$

On en conclut que :

$$\boxed{\min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_{A \cap B}}$$

2. En procédant de manière analogue, on trouve que :

$$\boxed{\max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_{A \cup B}}$$

3. Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_B(x) = 1 &\iff \mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = 1 \\ &\iff x \in A \text{ et } x \in B \\ &\iff x \in A \cap B \\ &\iff \mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 1 \end{aligned}$$

Comme la fonction $\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$ ne prend que les valeurs 0 ou 1, on a aussi :

$$\mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_B(x) = 0 \iff x \notin A \cap B \iff \mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 0$$

On conclut donc que :

$$\boxed{\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A \cap B}}$$

4. Soit $x \in E$.

★ Si $x \in A$, alors :

$$(1 - \mathbf{1}_A)(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x) = 1 - 1 = 0 = \mathbf{1}_{\bar{A}}(x)$$

★ Sinon, $x \notin A$ (i.e. $x \in \bar{A}$), et :

$$(1 - \mathbf{1}_A)(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x) = 1 - 0 = 1 = \mathbf{1}_{\bar{A}}(x)$$

On conclut donc que :

$$\boxed{1 - \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{\bar{A}}}$$

5. En utilisant la question 4., on a :

$$1 - \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_{\overline{A \cup B}}$$

Or, d'après la formule de De Morgan et en utilisant la question 3., on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\overline{A \cup B}} &= \mathbf{1}_{\overline{A \cap B}} = \mathbf{1}_{\overline{A}} \times \mathbf{1}_{\overline{B}} \\ &= (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B) \quad (\text{question 4.}) \\ &= 1 - \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B}$$

6. Montrons que $(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2 = \mathbf{1}_{A \Delta B}$. On sait que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Soit $x \in E$. On distingue trois cas.

★ Si $x \in A \cap B$, alors $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = 1$ donc $(\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_B(x))^2 = 0$. Comme $x \in A \cap B$, on a $x \notin A \Delta B$ donc $\mathbf{1}_{A \Delta B}(x) = 0$.

★ Si $x \in A \Delta B$, alors :

$$(x \in A \text{ et } x \notin B) \quad \text{ou} \quad (x \notin A \text{ et } x \in B)$$

Ainsi, $\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_B(x) = \pm 1$, i.e. $(\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_B(x))^2 = 1$ et $\mathbf{1}_{A \Delta B}(x) = 1$.

★ Si $x \notin A \cup B$, alors $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = \mathbf{1}_{A \Delta B}(x) = 0$ donc on a encore l'égalité :

$$(\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_B(x))^2 = \mathbf{1}_{A \Delta B}(x)$$

Finalement :

$$\boxed{(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2 = \mathbf{1}_{A \Delta B}}$$

Exercice 41 (un entier est soit pair, soit impair) Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$. Il existe alors $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in \mathcal{P}$ et $x \in \mathcal{I}$. Donc il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k$ et $x = 2\ell + 1$. Ainsi :

$$2k = 2\ell + 1 \quad \text{ce qui implique que} \quad k - \ell = \frac{1}{2}$$

On obtient une absurdité puisque $k - \ell$ est un entier alors que $\frac{1}{2}$ n'en est pas un. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset}$$

Exercice 42 (équations ensemblistes)

1. Remarquons que, si X est une solution, alors $A \subset A \cup X = B$. Ainsi :

si A n'est pas un sous-ensemble de B , alors l'équation n'a pas de solution

On se place maintenant dans le cas où $A \subset B$. On raisonne par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : supposons qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \cup X = B$. On a :

$$(A \cup X) \cap \overline{A} = B \cap \overline{A} \quad \text{i.e.} \quad (A \cap \overline{A}) \cup (X \cap \overline{A}) = B \cap \overline{A}$$

par distributivité de la réunion par rapport à l'intersection. Or $A \cap \overline{A} = \emptyset$ donc la dernière égalité se réécrit :

$$X \cap \overline{A} = B \cap \overline{A}$$

On peut en déduire X :

$$X = X \cap (A \cup \overline{A}) = (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A}) = (X \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$$

On en déduit que :

$$X \in \{Y \cup (B \cap \overline{A}) \mid Y \in \mathcal{P}(A)\}$$

★ **Synthèse** : soit $Y \in \mathcal{P}(A)$ et posons $X = Y \cup (B \cap \overline{A})$. Alors (par associativité de la réunion) :

$$\begin{aligned} A \cup X &= \underbrace{(A \cup Y)}_{=A} \cup (B \cap \overline{A}) = A \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) \quad (\text{car } A \subset B) \\ &= B \cap (A \cup \overline{A}) \\ &= B \cap E \\ &= B \end{aligned}$$

donc X est solution de l'équation.

Finalement :

l'ensemble des solutions est $\{Y \cup (B \cap \overline{A}) \mid Y \in \mathcal{P}(A)\}$

2. On peut utiliser la question précédente. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$\begin{aligned} A \cap X = B &\iff \overline{A \cap X} = \overline{B} \iff \overline{A} \cup \overline{X} = \overline{B} \\ &\iff \overline{A} \cup Y = \overline{B} \end{aligned}$$

en posant $Y = \overline{X}$. D'après la question 1., cette équation admet des solutions si et seulement si $\overline{A} \subset \overline{B}$, i.e. si et seulement si $B \subset A$. Ainsi :

si B n'est pas un sous-ensemble de A , alors l'équation n'admet pas de solution

On suppose maintenant que $B \subset A$. D'après la question précédente :

$$\{Y \in \mathcal{P}(E) \mid \overline{A} \cup Y = \overline{B}\} = \{Z \cup (\overline{B} \cap A) \mid Z \in \mathcal{P}(\overline{A})\}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est :

$$\{\overline{Z \cup (\overline{B} \cap A)} \mid Z \in \mathcal{P}(\overline{A})\}$$

Or, pour tout $Z \in \mathcal{P}(\overline{A})$, on a d'après les lois de De Morgan :

$$\overline{Z \cup (\overline{B} \cap A)} = \overline{Z} \cap \overline{(\overline{B} \cap A)} = \overline{Z} \cap (B \cup \overline{A})$$

De plus :

$$\{\overline{Z} \mid Z \in \mathcal{P}(\overline{A})\} = \mathcal{P}(A)$$

donc :

l'ensemble des solutions est $\{Y \cap (B \cup \overline{A}) \mid Y \in \mathcal{P}(A)\}$