Logique et raisonnement

Exercice 1 Vrai ou faux ? Justifier.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \implies x \geqslant 3$;
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ x < y \implies \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$;
3. $\exists\, x \in \mathbb{R}_+,\ x < \sqrt{x}$;
4. $\forall x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x \neq x' \implies \dfrac{x+1}{x-1} \neq \dfrac{x'+1}{x'-1}$;
5. $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \geqslant N$;
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x \geqslant 0 \implies x \geqslant 0$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est périodique ;
2. f est majorée ;
3. f est constante ;
4. f est croissante ;
5. f possède un minimum ;
6. f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut ;
7. f s'annule au plus une fois.

Exercice 3 Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer les négation des assertions suivantes :

1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$;
2. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in I,\ f(x) = y$;
3. $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant M$;
4. $\forall x, y \in I,\ x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$;
5. $\forall x, y \in I,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$;
6. $\forall x \in I,\ f(x) > 0 \Longrightarrow x \leqslant 0$.

Exercice 4 (raisonnement direct) Démontrer que :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2}$;
2. $\forall x \in [0, 1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x^n - x^{n+1} \leqslant 1$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$;
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$;
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ (a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$.

1 Disjonction de cas

Exercice 5 Montrer que, pour tout entier relatif n, le nombre $n^4 - n + 2022$ est un entier pair.

Exercice 6 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 - x + 1 \geqslant |x - 1|$$

Exercice 7 Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

2 Raisonnement par l'absurde ou par contraposition

Exercice 8

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

$$(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leqslant \varepsilon) \Longrightarrow x = 0$$

2. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad (x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \Longrightarrow (xy - x - y \neq 1)$$

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n^2 \text{ est un multiple de } 6) \iff (n \text{ est un multiple de } 6)$$

Exercice 9 On admet que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \qquad x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Exercice 10 Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{x} = P(x)$$

3 Récurrences

Exercice 11

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$$

2. Déterminer un nombre réel x non entier vérifiant la propriété : $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 12 Pour tout entier naturel n, comparer les quantités $(n+1)\,!$ et 2^n.

Exercice 13 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la propriété $\mathscr{P}_n$: « l'entier $8^n + 1$ est divisible par 7 ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}$.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 14 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$$

1. Déterminer les racines ψ et $\overline{\psi}$ du polynôme $X^2 - X - 3$.
2. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{\psi^n - \left(\overline{\psi}\right)^n}{\psi - \overline{\psi}}$$

Exercice 15 (inégalité de Bernoulli) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Exercice 16 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},$$

où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ correspond à la somme $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Exercice 17 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le terme général u_n en fonction de n.

Exercice 18 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \exists\, a_n, b_n \in \mathbb{N},\ (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

Exercice 19 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+1}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$$

Exercice 20 À l'aide d'une récurrence forte, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \exists\, p, q \in \mathbb{N},\ n = 2^p(2q+1)$$

4 Analyse-synthèse

Exercice 21 Déterminer les nombres réels x tels que $\sqrt{2-x} = x$.

Exercice 22 Déterminer les fonctions impaires $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f - 1$ soit paire.

Exercice 23 Déterminer les solutions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x) + f(y) = 2f(x-y) + 1$$

Exercice 24 On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions affines et $\mathscr{B}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, d'une et une seule manière, d'une fonction de $\mathscr{A}$ et d'une fonction de $\mathscr{B}$.