

LIMITES ET CONTINUITÉ

(corrigés)

Exercice 3 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une fonction périodique admettant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

★ Supposons que $\ell = +\infty$. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq a \implies f(x) \geq f(0) + 1$$

La fonction f est périodique donc il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x+nT) = f(x)$$

On a $nT \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0T \geq a$. Par T -périodicité de f , on a $f(n_0T) = f(0)$ et comme $n_0T \geq a$, on a $f(n_0T) \geq f(0) + 1$. Ainsi, $f(0) \geq f(0) + 1$ i.e $0 \geq 1$, ce qui est absurde. La limite de f en $+\infty$ ne peut donc pas être égale à $+\infty$.

★ De la même manière, la limite de f en $+\infty$ ne peut pas être égale à $-\infty$.

★ On a donc $\ell \in \mathbb{R}$. On veut montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$ égale à ℓ . Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Comme $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \ell$, il existe $\alpha_p \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq \alpha_p \implies |f(x) - \ell| \leq \frac{1}{p}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $nT \geq \alpha_p$ (un tel entier existe car $nT \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$). Comme $[nT, (n+1)T] \subset [\alpha_p, +\infty[$, on a :

$$\forall x \in [nT, (n+1)T], \quad |f(x) - \ell| \leq \frac{1}{p}$$

Par T -périodicité de f , on a :

$$\forall x \in [0, T], \quad |f(x) - \ell| \leq \frac{1}{p}$$

On a donc montré que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, T], \quad \ell - \frac{1}{p} \leq f(x) \leq \ell + \frac{1}{p}$$

Soit $x \in [0, T]$. On a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \ell - \frac{1}{p} \leq f(x) \leq \ell + \frac{1}{p}$$

et $\ell \pm \frac{1}{p} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \ell$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $f(x) = \ell$. On vient de montrer que :

$$\forall x \in [0, T], \quad f(x) = \ell$$

Or la fonction f est T -périodique donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ell$$

Finalement :

la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$

Exercice 10 Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction polynomiale de degré $2n+1$. Il existe donc des nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_{2n+1}$ tels que $a_{2n+1} \neq 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k = a_{2n+1} x^{2n+1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x) = x^{2n+1} \left(a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right)$$

Or :

$$\frac{a_{2n}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad x^{2n+1} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_{2n+1} > 0 \\ -\infty & \text{si } a_{2n+1} < 0 \end{cases} \quad \text{et, de même,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_{2n+1} > 0 \\ +\infty & \text{si } a_{2n+1} < 0 \end{cases}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle et, d'après les limites précédentes, la borne inférieure de $f(\mathbb{R})$ est égale à $-\infty$ et sa borne supérieure est égale à $+\infty$. Par conséquent, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, 0 appartient à $f(\mathbb{R})$, ce qui signifie que :

la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$

Exercice 11 Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], [a, b])$. Montrons que f admet un point fixe dans l'intervalle $[a, b]$. On considère la fonction :

$$g : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{cases}$$

La fonction est continue sur $[a, b]$ comme différence de fonctions qui le sont. De plus :

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \quad \text{car} \quad f(a) \in [a, b]$$

et :

$$g(b) = f(b) - b \leq 0 \quad \text{car} \quad f(b) \in [a, b]$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$ i.e. tel que $f(x_0) = x_0$ par définition de g . Finalement :

la fonction f admet un point fixe dans l'intervalle $[a, b]$

Exercice 12

- On suppose que $f \circ f$ possède un point fixe. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $(f \circ f)(a) = f(a)$. On raisonne par l'absurde en supposant que f n'admet pas de point fixe. On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. On a :

$$g(a) = f(a) - a \quad \text{et} \quad g(f(a)) = f(f(a)) - f(a) = a - f(a) = -g(a)$$

car a est un point fixe de $f \circ g$. Comme f n'admet pas de point fixe, a n'est pas un point fixe de f , i.e. $g(a) \neq 0$. On en déduit que $g(a)$ et $g(f(a))$ sont non nuls de signes contraires. Comme g est continue sur $\mathbb{R}$ (comme différence de fonctions qui le sont), on sait d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $b \in [\min(a, f(a)), \max(a, f(a))]$ tel que $g(b) = 0$, i.e. tel que $f(b) = b$. Ceci est absurde car on a supposé que f n'admettait pas de point fixe. Finalement :

la fonction f admet un point fixe sur $\mathbb{R}$

- On suppose que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

★ Montrons que f possède un point fixe. Considérons la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. Cette fonction est continue et décroissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont.

— Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}$, le théorème de la limite monotone assure l'existence d'une limite en $-\infty$ appartenant à $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. D'après les opérations sur les limites, on a nécessairement $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.

— De même, f admet une limite en $+\infty$ qui appartient à $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ donc $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, $0 \in g(\mathbb{R})$ donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. tel que $f(x_0) = x_0$. Autrement dit, x_0 est un point fixe de f .

★ Il reste à montrer l'unicité. On raisonne par l'absurde en supposant que f admet deux points fixes $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}$, on a $f(x) \geq g(y)$. Or x et y sont des points fixes de f donc cette inégalité se réécrit $x \geq y$. Ceci est absurde car $x < y$.

Finalement :

la fonction f possède un unique point fixe

Exercice 15 Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrons que les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

★ La fonction g est bornée sur $\mathbb{R}$ donc il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq M$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad m \leq g(x) \leq M$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \in \mathbb{R}$ donc $m \leq g(f(x)) \leq M$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad m \leq (g \circ f)(x) \leq M$$

La fonction donc $g \circ f$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

★ On a $g(\mathbb{R}) \subset [m, M]$ donc $f(g(\mathbb{R})) \subset f([m, M])$, i.e. $(f \circ g)(\mathbb{R}) \subset f([m, M])$. La fonction f est continue sur le segment $[m, M]$ donc elle y est bornée (d'après le théorème des bornes atteintes). Il existe donc $m', M' \in \mathbb{R}$ tels que $m' \leq M'$ et $f([m, M]) \subset [m', M']$. On a donc :

$$(f \circ g)(\mathbb{R}) \subset [m', M'] \quad \text{i.e.} \quad (\forall x \in \mathbb{R}, \quad m' \leq (f \circ g)(x) \leq M')$$

La fonction donc $f \circ g$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Finalement :

les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$

Exercice 16 La fonction $f - g$ est continue sur le segment $[a, b]$ comme différence de fonctions qui le sont. D'après le théorème des bornes atteintes, cette fonction admet un minimum sur $[a, b]$. Autrement dit, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], \quad (g - f)(x) \geq (g - f)(x_0)$$

En posant $\lambda = (g - f)(x_0) \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) - f(x) \geq \lambda \quad i.e. \quad g(x) \geq f(x) + \lambda$$

De plus, $\lambda = g(x_0) - f(x_0) > 0$ car $f < g$ sur $[a, b]$ par hypothèse et car $x_0 \in [a, b]$. Ainsi :

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [a, b], \quad f(x) + \lambda \leq g(x)}$$

Exercice 17

★ On a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists a \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq a \implies f(x) \geq A$$

Pour $A = |f(0)| + 1 \in \mathbb{R}_+$, il existe donc $a \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq a \implies f(x) \geq |f(0)| + 1$$

★ De même, on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ donc il existe $b \in \mathbb{R}_-$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq b \implies f(x) \geq |f(0)| + 1$$

★ La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ donc elle y atteint son minimum ; il existe donc $x_0 \in [a, b]$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Comme $x_0 \in [a, b]$ (car $a \leq 0 \leq b$), on a $f(x_0) \leq f(0)$ donc $f(x_0) \leq |f(0)| + 1$. Or :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [a, b], \quad f(x) \geq |f(0)| + 1$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

On en déduit que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ en x_0 (qui vaut $f(x_0)$). Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet un minimum sur } \mathbb{R}}$$

Exercice 25

1. En choisissant $x = y = 0 \in \mathbb{R}$ dans la relation vérifiée par f , on obtient :

$$f(0) = f(0)^2 \quad i.e. \quad f(0)(1 - f(0)) = 0 \quad \text{soit encore} \quad f(0) \in \{0, 1\}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{les valeurs possibles de } f(0) \text{ sont } 0 \text{ ou } 1}$$

2. On suppose que $f(0) = 0$. En choisissant $y = 0$ dans la relation vérifiée par f , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{si } f(0) = 0, \text{ alors } f = 0_{\mathbb{R}\mathbb{R}}}$$

3. On suppose que $f(0) = 1$.

(a) On raisonne par l'absurde : supposons que f s'annule sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. D'après la relation vérifiée par f , on a :

$$f(0) = f(x_0 + (-x_0)) = f(x_0)f(-x_0) = 0,$$

ce qui est exclu. Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a (en utilisant à nouveau la relation vérifiée par f) :

$$f(x) = f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$$

et, comme f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente, on a $f(x) > 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est à valeurs strictement positives sur } \mathbb{R}}$$

(c) La question précédente nous permet de considérer la fonction :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(f(x)) \end{cases}$$

Cette fonction est de plus continue sur $\mathbb{R}$ (comme composée de fonctions continues) et est telle que :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad g(x+y) &= \ln(f(x+y)) = \ln(f(x)f(y)) \\ &= \ln(f(x)) + \ln(f(y)) \\ &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

D'après l'exercice 19, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = ax \quad i.e. \quad \ln(f(x)) = ax$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $f(x) = e^{ax}$. Ainsi :

$$\boxed{\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{ax}}$$

Exercice 26

1. En choisissant $x = y = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ dans la relation vérifiée par f , on a $f(1) = f(1) + f(1)$ donc :

$$\boxed{f(1) = 0}$$

Comme f n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. On a ou bien $x_0 < 1$, ou bien $x_0 > 1$.

★ **Premier cas :** $x_0 > 1$

On a $f(x_0^2) = 2f(x_0)$ (on choisit $y = x = x_0 > 0$ dans la relation vérifiée par f) puis :

$$f(x_0^3) = f(x_0^2 \times x_0) = f(x_0^2) + f(x_0) = 3f(x_0)$$

et, par une récurrence immédiate, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_0^n) = nf(x_0)$$

Comme $f(x_0) > 0$ (en effet, f est croissante et on a $1 < x_0$ et $f(1) = 0$), on a $f(x_0^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Comme la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on sait d'après le théorème de la limite monotone que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$. De plus, $x_0 > 1$ donc $x_0^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, d'après la caractérisation séquentielle de la limite, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

Finalement :

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

★ **Deuxième cas :** $x_0 \in]0, 1[$

On a $x_0 < 1$, $f(1) = 0$ et f est croissante donc $f(x_0) < 0$. De plus : On a :

$$f(1) = f\left(x_0 \times \frac{1}{x_0}\right) = f(x_0) + f\left(\frac{1}{x_0}\right) \quad \text{donc} \quad f\left(\frac{1}{x_0}\right) = -f(x_0) > 0$$

En reprenant le premier point avec $\frac{1}{x_0}$ (au lieu de x_0), on obtient à nouveau que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Finalement :

$$\boxed{\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$0 = f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{i.e.} \quad f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, on a d'après le théorème de composition des limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty}$$

3. Montrons 1 est le seul point d'annulation de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ tel que $f(x_0) = 0$. Quitte à remplacer x_0 par $\frac{1}{x_0}$, on peut supposer que $x_0 > 1$. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On a $f(x_0^n) = nf(x_0) = 0$ et comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est nulle sur l'intervalle $[x_0, x_0^n]$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on obtient que f est nulle sur :

$$\bigcup_{n=2}^{+\infty} [x_0, x_0^n] = [x_0, +\infty[$$

ce qui contredit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Finalement :

$$\boxed{\text{la seule solution de l'équation } f(x) \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R}_+^* \text{ est } x = 1}$$

Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$. Alors $\frac{y}{x} > 1$ et f est croissante donc $f\left(\frac{y}{x}\right) \geq f(1) = 0$. Mais 1 est le seul point d'annulation de f donc $f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$. Or d'après la relation vérifiée par f , on a :

$$0 < f\left(\frac{y}{x}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(y) - f(x)$$

On en déduit donc que $f(x) < f(y)$. Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$$