Limites et continuité

(corrigés)

Exercice 3 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une fonction périodique admettant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

- ⋆ Supposons que $\ell = +\infty$. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x \geqslant a \implies f(x) \geqslant f(0)+1$$

La fonction f est périodique donc il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) = f(x)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x+nT) = f(x)$$

On a $nT \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0T \geqslant a$. Par T-périodicité de f, on a $f(n_0T) = f(0)$ et comme $n_0T \geqslant a$, on a $f(n_0T) \geqslant f(0)+1$. Ainsi, $f(0) \geqslant f(0)+1$ *i.e* $0 \geqslant 1$, ce qui est absurde. La limite de f en $+\infty$ ne peut donc pas être égale à $+\infty$.

- ⋆ De la même manière, la limite de f en $+\infty$ ne peut pas être égale à $-\infty$.
- ⋆ On a donc $\ell \in \mathbb{R}$. On veut montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$ égale à ℓ. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Comme $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, il existe $\alpha_p \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x \geqslant \alpha_p \implies |f(x)-\ell| \leqslant \frac{1}{p}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $nT \geqslant \alpha_p$ (un tel entier existe car $nT \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$). Comme $[nT,(n+1)T] \subset [\alpha_p,+\infty[$, on a :

$$\forall x \in [nT,(n+1)T], \qquad |f(x)-\ell \leqslant \frac{1}{p}$$

Par T-périodicité de f, on a :

$$\forall x \in [0,T], \qquad |f(x)-\ell| \leqslant \frac{1}{p}$$

On a donc montré que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,T], \qquad \ell - \frac{1}{p} \leqslant f(x) \leqslant \ell + \frac{1}{p}$$

Soit $x \in [0,T]$. On a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \ell - \frac{1}{p} \leqslant f(x) \leqslant \ell + \frac{1}{p}$$

et $\ell \pm \frac{1}{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \ell$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $f(x) = \ell$. On vient de montrer que :

$$\forall x \in [0,T], \qquad f(x) = \ell$$

Or la fonction f est T-périodique donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \ell$$

Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$$

Exercice 10 Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction polynomiale de degré $2n+1$. Il existe donc des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_{2n+1}$ tels que $a_{2n+1} \neq 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k = a_{2n+1}x^{2n+1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x) = x^{2n+1}\left(a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}}\right)$$

Or :

$$\frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad x^{2n+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_{2n+1} > 0 \\ -\infty & \text{si } a_{2n+1} < 0 \end{cases} \qquad \text{et, de même,} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_{2n+1} > 0 \\ +\infty & \text{si } a_{2n+1} < 0 \end{cases}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle et, d'après les limites précédentes, la borne inférieure de $f(\mathbb{R})$ est égale à $-\infty$ et sa borne supérieure est égale à $+\infty$. Par conséquent, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, 0 appartient) $f(\mathbb{R})$, ce qui signifie que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ s'annule sur } \mathbb{R}}$$

Exercice 11 Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],[a,b])$. Montrons que f admet un point fixe dans l'intervalle $[a,b]$. On considère la fonction :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)-x \end{array} \right.$$

La fonction est continue sur $[a,b]$ comme différence de fonctions qui le sont. De plus :

$$g(a) = f(a) - a \geqslant 0 \qquad \text{car} \qquad f(a) \in [a,b]$$

et :

$$g(b) = f(b) - b \leqslant 0 \qquad \text{car} \qquad f(b) \in [a,b]$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x_0) = 0$ *i.e.* tel que $f(x_0) = x_0$ par définition de g. Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet un point fixe dans l'intervalle } [a,b]}$$

Exercice 12

1. On suppose que $f \circ f$ possède un point fixe. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $(f \circ f)(a) = f(a)$. On raisonne par l'absurde en supposant que f n'admet pas de point fixe. On considère la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$. On a :

$$g(a) = f(a) - a \qquad \text{et} \qquad g(f(a)) = f(f(a)) - f(a) = a - f(a) = -g(a)$$

car a est un point fixe de $f \circ g$. Comme f n'admet pas de point fixe, a n'est pas un point fixe de f, *i.e.* $g(a) \neq 0$. On en déduit que $g(a)$ et $g(f(a))$ sont non nuls de signes contraires. Comme g est continue sur $\mathbb{R}$ (comme différence de fonctions qui le sont), on sait d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $b \in [\min(a, f(a)), \max(a, f(a))]$ tel que $g(b) = 0$, *i.e.* tel que $f(b) = b$. Ceci est absurde car on a supposé que f n'admettait pas de point fixe. Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet un point fixe sur } \mathbb{R}}$$

2. On suppose que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   - ⋆ Montrons que f possède un point fixe. Considérons la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$. Cette fonction est continue et décroissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont.
     - — Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}$, le théorème de la limite monotone assure l'existence d'une limite en $-\infty$ appartenant à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. D'après les opérations sur les limites, on a nécessairement $g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$.
     - — De même, f admet une limite en $+\infty$ qui appartient à $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ donc $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$.

     D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, $0 \in g(\mathbb{R})$ donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$, *i.e.* tel que $f(x_0) = x_0$. Autrement dit, x_0 est un point fixe de f.
   - ⋆ Il reste à montrer l'unicité. On raisonne par l'absurde en supposant que f admet deux points fixes $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}$, on a $f(x) \geqslant g(y)$. Or x et y sont des points fixes de f donc cette inégalité se réécrit $x \geqslant y$. Ceci est absurde car $x < y$.

   Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ possède un unique point fixe}}$$

Exercice 15 Soient $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une fonction bornée. Montrons que les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

- ⋆ La fonction g est bornée sur $\mathbb{R}$ donc il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leqslant M$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad m \leqslant g(x) \leqslant M$$

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \in \mathbb{R}$ donc $m \leqslant g(f(x)) \leqslant M$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad m \leqslant (g \circ f)(x) \leqslant M$$

  La fonction donc $g \circ f$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$.
- ⋆ On a $g(\mathbb{R}) \subset [m, M]$ donc $f(g(\mathbb{R})) \subset f([m, M])$, *i.e.* $(f \circ g)(\mathbb{R}) \subset f([m, M])$. La fonction f est continue sur le segment $[m, M]$ donc elle y est bornée (d'après le théorème des bornes atteintes). Il existe donc $m', M' \in \mathbb{R}$ tels que $m' \leqslant M'$ et $f([m, M]) \subset [m', M']$. On a donc :

$$(f \circ g)(\mathbb{R}) \subset [m', M'] \qquad \textit{i.e.} \qquad (\forall x \in \mathbb{R},\ m' \leqslant (f \circ g)(x) \leqslant M')$$

  La fonction donc $f \circ g$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{les fonctions } f \circ g \text{ et } g \circ f \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}}$$

Exercice 16 La fonction $f - g$ est continue sur le segment $[a,b]$ comme différence de fonctions qui le sont. D'après le théorème des bornes atteintes, cette fonction admet un minimum sur $[a,b]$. Autrement dit, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que :

$$\forall x \in [a,b], \qquad (g - f)(x) \geqslant (g - f)(x_0)$$

En posant $\lambda = (g-f)(x_0) \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in [a,b], \qquad g(x) - f(x) \geqslant \lambda \qquad i.e. \qquad g(x) \geqslant f(x) + \lambda$$

De plus, $\lambda = g(x_0) - f(x_0) > 0$ car $f < g$ sur $[a,b]$ par hypothèse et car $x_0 \in [a,b]$. Ainsi :

$$\boxed{\exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in [a,b], \qquad f(x) + \lambda \leqslant g(x)}$$

Exercice 17

- ⋆ On a $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \exists\, a \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant a \implies f(x) \geqslant A$$

Pour $A = |f(0)| + 1 \in \mathbb{R}_+$, il existe donc $a \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant a \implies f(x) \geqslant |f(0)| + 1$$

- ⋆ De même, on a $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ donc il existe $b \in \mathbb{R}_-$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant b \implies f(x) \geqslant |f(0)| + 1$$

- ⋆ La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ donc elle y atteint son minimum ; il existe donc $x_0 \in [a,b]$ tel que :

$$\forall x \in [a,b], \qquad f(x) \geqslant f(x_0)$$

Comme $x_0 \in [a,b]$ (car $a \leqslant 0 \leqslant b$), on a $f(x_0) \leqslant f(0)$ donc $f(x_0) \leqslant |f(0)| + 1$. Or :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [a,b], \qquad f(x) \geqslant |f(0)| + 1$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \geqslant f(x_0)$$

On en déduit que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ en x_0 (qui vaut $f(x_0)$). Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet un minimum sur } \mathbb{R}}$$

Exercice 25

1. En choisissant $x = y = 0 \in \mathbb{R}$ dans la relation vérifiée par f, on obtient :

$$f(0) = f(0)^2 \qquad i.e. \qquad f(0)(1 - f(0)) = 0 \qquad \text{soit encore} \qquad f(0) \in \{0,1\}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{les valeurs possibles de } f(0) \text{ sont } 0 \text{ ou } 1}$$

2. On suppose que $f(0) = 0$. En choisissant $y = 0$ dans la relation vérifiée par f, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{si } f(0) = 0, \text{ alors } f = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}}$$

3. On suppose que $f(0) = 1$.

   (a) On raisonne par l'absurde : supposons que f s'annule sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. D'après la relation vérifiée par f, on a :

$$f(0) = f\big(x_0 + (-x_0)\big) = f(x_0)f(-x_0) = 0,$$

   ce qui est exclu. Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}}$$

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a (en utilisant à nouveau la relation vérifiée par f) :

$$f(x) = f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

   et, comme f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente, on a $f(x) > 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est à valeurs strictement positives sur } \mathbb{R}}$$

   (c) La question précédente nous permet de considérer la fonction :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(f(x)) \end{array} \right.$$

   Cette fonction est de plus continue sur $\mathbb{R}$ (comme composée de fonctions continues) et est telle que :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} g(x+y) = \ln(f(x+y)) &= \ln\big(f(x)f(y)\big) \\ &= \ln(f(x)) + \ln(f(y)) \\ &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

   D'après l'exercice 19, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = ax \qquad i.e. \qquad \ln(f(x)) = ax$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Ainsi :

$$\boxed{\exists\, a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{e}^{ax}}$$

Exercice 26

1. En choisissant $x = y = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ dans la relation vérifiée par f, on a $f(1) = f(1)+f(1)$ donc :
$$\boxed{f(1) = 0}$$
Comme f n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. On a ou bien $x_0 < 1$, ou bien $x_0 > 1$.
   - ⋆ **Premier cas :** $x_0 > 1$
   On a $f(x_0^2) = 2f(x_0)$ (on choisit $y = x = x_0 > 0$ dans la relation vérifiée par f) puis :
   $$f(x_0^3) = f(x_0^2 \times x_0) = f(x_0^2) + f(x_0) = 3f(x_0)$$
   et, par une récurrence immédiate, on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x_0^n) = nf(x_0)$$
   Comme $f(x_0) > 0$ (en effet, f est croissante et on a $1 < x_0$ et $f(1) = 0$), on a $f(x_0^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Comme la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on sait d'après le théorème de la limite monotone que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$. De plus, $x_0 > 1$ donc $x_0^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc, d'après la caractérisation séquentielle de la limite, on a :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$
   Finalement :
   $$\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
   - ⋆ **Deuxième cas :** $x_0 \in]0, 1[$
   On a $x_0 < 1$, $f(1) = 0$ et f est croissante donc $f(x_0) < 0$. De plus : On a :
   $$f(1) = f\left(x_0 \times \frac{1}{x_0}\right) = f(x_0) + f\left(\frac{1}{x_0}\right) \qquad \text{donc} \qquad f\left(\frac{1}{x_0}\right) = -f(x_0) > 0$$
   En reprenant le premier point avec $\frac{1}{x_0}$ (au lieu de x_0), on obtient à nouveau que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

   Finalement :
$$\boxed{\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$0 = f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \textit{i.e.} \qquad f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$$
Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$, on a d'après le théorème de composition des limites :
$$\lim_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to+\infty} f(y) = +\infty$$
On en déduit que :
$$\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty}$$

3. Montrons 1 est le seul point d'annulation de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ tel que $f(x_0) = 0$. Quitte à remplacer x_0 par $\frac{1}{x_0}$, on peut supposer que $x_0 > 1$. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On a $f(x_0^n) = nf(x_0) = 0$ et comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est nulle sur l'intervalle $[x_0, x_0^n]$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on obtient que f est nulle sur :
$$\bigcup_{n=2}^{+\infty} [x_0, x_0^n] = [x_0, +\infty[,$$
ce qui contredit que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Finalement :
$$\boxed{\text{la seule solution de l'équation } f(x) \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R}_+^* \text{ est } x = 1}$$
Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$. Alors $\frac{y}{x} > 1$ et f est croissante donc $f\left(\frac{y}{x}\right) \geqslant f(1) = 0$. Mais 1 est le seul point d'annulation de f donc $f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$. Or d'après la relation vérifiée par f, on a :
$$0 < f\left(\frac{y}{x}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(y) - f(x)$$
On en déduit donc que $f(x) < f(y)$. Finalement :
$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$$