

LIMITES ET CONTINUITÉ

1 Limites

Exercice 1 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\ln(e^x + 1)}$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(e^x + 1)}$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\operatorname{ch}(x) + x}$
8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\operatorname{ch}(x) + x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \ln(\ln(x))$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + e^{\sin(x)}}{x + 1}$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}$
12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}$
13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

Exercice 2 Montrer que les fonctions suivantes n'admettent pas de limite au point indiqué :

1. $f : x \mapsto \sin(\cos(x))$ en $+\infty$
2. $g : x \mapsto \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$ en 0
3. $h : x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ en $+\infty$
4. $i : x \mapsto \cos\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)$ en 0.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique et admettant une limite en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

1. Déterminer les valeurs possibles de $f(1)$. Conclure dans le cas où $f(1) = 0$.
2. On suppose maintenant que $f(1) \neq 0$.
 - (a) Montrer que $f|_{\mathbb{Q}} = \operatorname{Id}_{\mathbb{Q}}$.
 - (b) Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}_+$ puis que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
 - (c) En déduire que $f = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$.

2 Continuité, prolongement par continuité

Exercice 5 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, le domaine de continuité, ainsi que les éventuels prolongements par continuité.

1. $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$
3. $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
4. $x \mapsto \frac{x^3 + 3x + 2}{x^2 - 1}$

Exercice 6 Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ★ f est croissante sur $]0, +\infty[$;
- ★ $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7 Soit $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$. Montrer que $f = g$.

Exercice 8 Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction k -lipschitzienne, c'est-à-dire telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3 Théorèmes autour de la continuité

Exercice 9 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)^2 = 1$$

Déterminer f .

2. (a) Montrer que si la fonction $|f|$ est constante, alors f l'est également.
- (b) Qu'en est-il si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$?

Exercice 10 Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair à coefficients réels possède au moins une racine réelle.

Exercice 11 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ une fonction continue telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 12 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un *point fixe* de f si $f(x_0) = x_0$. Les deux questions sont indépendantes.

1. On suppose que $f \circ f$ possède un point fixe. Montrer que f en possède un aussi.
2. On suppose que f est décroissante. Montrer que f possède un et un seul point fixe.

Exercice 13 Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que f possède un point fixe dans chacun des deux cas suivants :

1. $f([a, b]) \subset [a, b]$;
2. $[a, b] \subset f([a, b])$.

Exercice 14 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f admet une limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) < g(x)$$

Montrer que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in [a, b], \quad f(x) + \lambda \leq g(x)$$

Exercice 17 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$ et sont égales. Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 19 (suite implicite) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, on considère l'équation :

$$x^n - x - 1 = 0 \quad (E_n)$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, l'équation (E_n) admet une unique solution dans l'intervalle $\left] 1, 1 + \frac{1}{n} \right[$ (que l'on note x_n).
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ converge vers 1.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, on a $n \ln(x_n) = \ln(1 + x_n)$.

4. Justifier que $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1$ puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln(2)}(x_n - 1) = 1$.

4 Équations fonctionnelles

Exercice 20 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x)$$

Exercice 21 Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Exercice 22 1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

(b) Justifier que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ puis montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

(c) Justifier que la limite précédente reste valable si $x \in \mathbb{R}^*$.

2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x) \cos(x)$$

Exercice 23 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

1. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
2. Déterminer f dans le cas où $f(0) = 0$.
3. On suppose que $f(0) \neq 0$.
 - (a) Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
 - (b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) > 0$.

(c) Conclure que :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{ax}$$

Exercice 24 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = nf(x)$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(nx) = nf(x)$$

2. En déduire que :

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r) = rf(1)$$

3. Conclure que :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax \quad (i.e. \text{ que } f = a \text{Id}_{\mathbb{R}})$$

Exercice 25 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

1. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?2. Déterminer f si $f(0) = 0$.3. On suppose que $f(0) \neq 0$.(a) Démontrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.(b) En déduire que f est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{ax}$$

Exercice 26 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, non identiquement nulle, et telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

1. Calculer $f(1)$ puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.2. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$?3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, puis en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.