Limites et continuité

1 Limites

Exercice 1 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to0} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{\ln(\mathrm{e}^x+1)}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\ln(\mathrm{e}^x+1)}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{ch}(x)+x}$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{ch}(x)+x}$
9. $\lim\limits_{x\to1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\mathrm{e}^{\sin(x)}}{x+1}$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-3x+2}{x-1}$
12. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3x+2}{x-1}$
13. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-3x+2}{x-1}$
14. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Exercice 2 Montrer que les fonctions suivantes n'admettent pas de limite au point indiqué :

1. $x\longmapsto \sin(\cos(x))$ en $+\infty$;
2. $x\longmapsto \sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ en 0 ;
3. $x\longmapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ en $+\infty$;
4. $x\longmapsto \cos\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right)$ en 0.

Exercice 3 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction périodique et admettant une limite en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 4 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\qquad f(x+y)=f(x)+f(y)\qquad\text{et}\qquad f(xy)=f(x)f(y)$$

1. Déterminer les valeurs possibles de $f(1)$. Conclure dans le cas où $f(1)=0$.
2. On suppose maintenant que $f(1)\neq0$.
   (a) Montrer que $f|_{\mathbb{Q}}=\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$.
   (b) Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}_+$ puis que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 5 Soit $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction croissante, non identiquement nulle, et telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*,\qquad f(xy)=f(x)+f(y)$$

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Que vaut $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$?
2. Résoudre l'équation $f(x)=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+^*$, puis en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Continuité, prolongement par continuité

Exercice 6 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, le domaine de continuité, ainsi que les éventuels prolongements par continuité.

1. $x\longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $x\longmapsto \lfloor x\rfloor+\left(x-\lfloor x\rfloor\right)^2$
3. $x\longmapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
4. $x\longmapsto \dfrac{x^3+3x+2}{x^2-1}$

Exercice 7 Soit $f,g\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f|_{\mathbb{Q}}=g|_{\mathbb{Q}}$. Montrer que $f=g$.

Exercice 8 Soient $k\in\mathbb{R}_+^*$ et $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne, c'est-à-dire telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\qquad |f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3 Théorèmes autour de la continuité

Exercice 9 Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

1. On suppose que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x)^2 = 1$$
Déterminer f.
2. (a) Montrer que si la fonction $|f|$ est constante, alors f l'est également.
   (b) Qu'en est-il si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$?

Exercice 10 Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels possède au moins une racine réelle.

Exercice 11 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point fixe de f si $f(x_0) = x_0$. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. On suppose que $f \circ f$ possède un point fixe. Montrer que f en possède un aussi.
2. On suppose que f est décroissante. Montrer que f possède un et un seul point fixe.

Exercice 12 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f admet une limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f, g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que :
$$\forall x \in [a, b], \qquad f(x) < g(x)$$
Montrer que :
$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in [a, b], \qquad f(x) + \lambda \leqslant g(x)$$

Exercice 15 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}(]a, b[, \mathbb{R})$ une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$ et sont égales. Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 17 (suite implicite) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère l'équation :
$$x^n - x - 1 = 0 \tag{E}$$

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle $\left]1, 1 + \dfrac{1}{n}\right[$ (que l'on note x_n).
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 3}$ converge vers 1.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a $n \ln(x_n) = \ln(1 + x_n)$.
4. En admettant que $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{\ln(t)}{t - 1} = 1$, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{\ln(2)}(x_n - 1) = 1$.

4 Équations fonctionnelles

Exercice 18 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = f(x)$$

Exercice 19 Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f\left(\frac{x + y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Exercice 20 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_n(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$
2. En déduire que :
$$\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Exercice 21 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(nx) = nf(x)$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad f(nx) = nf(x)$$
2. En déduire que :
$$\forall r \in \mathbb{Q}, \qquad f(r) = rf(1)$$
3. Conclure que :
$$\exists\, a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax \qquad (\textit{i.e.}\text{ que } f = a\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$$