Intégration

(corrigés)

Exercice 1

1. Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que la fonction f ne s'annule pas sur $[a,b]$. Comme f est continue sur l'intervalle $[a,b]$, l'ensemble $f([a,b])$ est un intervalle (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) qui est inclus dans $\mathbb{R}^*$ par hypothèse. On a donc $f([a,b]) \subset \mathbb{R}_-^*$ ou $f([a,b]) \subset \mathbb{R}_+^*$.
   - ⋆ Si $f([a,b]) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors la fonction f est à valeurs strictement positives sur $[a,b]$. De plus, la fonction f est continue sur $[a,b]$ et $a<b$ donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$ (d'après le théorème de nullité de l'intégrale).
   - ⋆ Si $f([a,b]) \subset \mathbb{R}_-^*$, alors la fonction f est à valeurs strictement négatives sur $[a,b]$. La théorème de nullité de l'intégrale nous donne, comme au point précédent, que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t < 0$.

   Dans tous les cas, on peut conclure que :
   $$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0}$$

2. Posons $\alpha = \dfrac{1}{b-a} f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction $g : \left\{\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)-\alpha \end{array}\right.$.
   La fonction g est continue sur $[a,b]$ (car la fonction f l'est) et :
   $$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \alpha\int_a^b 1\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\alpha \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(par définition de } \alpha) \\ &= 0\end{aligned}$$
   D'après la question 1. (forme contraposée), la fonction g s'annule sur $[a,b]$: il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c)=0$. Autrement dit :
   $$\boxed{\exists\, c \in [a,b], \qquad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 2

Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a<b$ et $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. On raisonne par double implication.

- ⋆ On suppose que f est de signe constant sur $[a,b]$. On distingue deux cas.
  - — **Premier cas :** la fonction f est à valeurs positives sur $[a,b]$
    Par positivité de l'intégrale, on a (puisque $a \leqslant b$) :
    $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
    De plus :
    $$(\forall t \in [a,b],\ |f(t)| = f(t)) \qquad \text{donc} \qquad \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
    On a donc bien l'égalité $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
  - — **Deuxième cas :** la fonction f est à valeurs négatives sur $[a,b]$
    Par positivité de l'intégrale, on a :
    $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
    De plus :
    $$(\forall t \in [a,b],\ |f(t)| = -f(t)) \qquad \text{donc} \qquad \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b -f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$
    On a donc bien l'égalité $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

- ⋆ On suppose maintenant que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Montrons que f est de signe constant sur $[a, b]$. Comme $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est un nombre réel, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. On distingue donc deux cas.

— **Premier cas :** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$

L'égalité précédente se réécrit :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit encore} \qquad \int_a^b (|f(t)| - f(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

La fonction $t \longmapsto |f(t)| - f(t)$ est continue sur $[a, b]$ (car f est continue sur $[a, b]$ et car $t \longmapsto |t|$ est continue sur $\mathbb{R}$) et elle est positive sur $[a, b]$ (car : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant |x|$). D'après le théorème de nullité de l'intégrale (on a bien $a < b$), cette fonction est nulle sur $[a, b]$, *i.e.* :

$$\forall t \in [a, b], \qquad |f(t)| = f(t)$$

Autrement dit, la fonction f est positive sur $[a, b]$; en particulier, elle y est de signe constant.

— **Deuxième cas :** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$

L'égalité précédente se réécrit :

$$-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit encore} \qquad \int_a^b (|f(t)| + f(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

On applique le théorème de nullité de l'intégrale à la fonction $t \longmapsto |f(t)| + f(t)$, continue et positive sur $[a, b]$. On obtient :

$$\forall t \in [a, b], \qquad f(t) = -|f(t)|$$

La fonction f est donc à valeurs négatives sur $[a, b]$. Elle est donc de signe constant.

Finalement :

$$\boxed{\text{on a l'égalité } \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ si et seulement si la fonction } f \text{ est de signe constante sur } [a, b]}$$

Exercice 3

1. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\sin' = \cos$ est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$ (en effet : $\forall u \in \mathbb{R},\ |\cos(u)| \leqslant 1$). D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\boxed{\text{la fonction sin est 1-lipschitzienne sur } \mathbb{R}}$$

2.
   - ⋆ Tout d'abord, la fonction F est bien définie car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(t)\sin(xt)$ est continue sur le segment $[a, b]$ (comme produit de fonctions continues).
   - ⋆ Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &= \int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\sin(yt)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(t)(\sin(xt) - \sin(yt))\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Comme $a \leqslant b$, on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leqslant \int_a^b |f(t)(\sin(xt) - \sin(yt))|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b |f(t)| \times |\sin(xt) - \sin(yt)|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On sait que la fonction sin est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, *i.e.* :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \qquad |\sin(u) - \sin(v)| \leqslant |u - v|$$

On en déduit que :

$$\forall t \in [a, b], \qquad |\sin(xt) - \sin(yt)| \leqslant |xt - yt| = |x - y| \times |t|$$

On en déduit que :

$$\forall t \in [a, b], \qquad |f(t)| \times |\sin(xt) - \sin(yt)| \leqslant |x - y| \times |tf(t)|$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_a^b |f(t)| \times |\sin(xt) - \sin(yt)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b |tf(t)|\,\mathrm{d}t\right)|x - y|$$

En posant $M = \displaystyle\int_a^b |tf(t)|\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}_+$, on a montré que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |F(x) - F(y)| \leqslant M|x - y|$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est } M\text{-lipschitzienne}}$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $x_k = \dfrac{k}{n}$. La famille $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une subdivision de $[0,1]$ et :

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \forall t \in]x_k, x_{k+1}[, \qquad f(t) = k \qquad (\text{car } k < nt < k+1)$$

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la fonction f est donc constante (égale à k) sur l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est en escalier sur } [0,1] \text{ (et } \sigma \text{ en est une subdivision adaptée)}}$$

De plus, par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier, on a :

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} f = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)k\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \frac{1}{n}\times\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_{[0,1]} f = \frac{n-1}{2}}$$

Exercice 5 Les intégrales sont bien définies car les intégrandes sont continues, ou continues par morceaux, sur le segment d'intégration.

1. Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\min(t,1-t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leqslant 1-t \\ 1-t & \text{si } t > 1-t \end{cases} = \begin{cases} t & \text{si } t \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1-t & \text{si } t > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La relation de Chasles nous donne donc :

$$\begin{aligned}A = \int_0^{\frac{1}{2}} t\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{A = \frac{1}{4}}$$

2. Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$|3t-1| = \begin{cases} 3t-1 & \text{si } 3t-1 \geqslant 0 \\ -(3t-1) & \text{si } 3t-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3t-1 & \text{si } t \geqslant \dfrac{1}{3} \\ 1-3t & \text{si } t < \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}B = \int_0^{\frac{1}{3}} (1-3t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{3}}^1 (3t-1)\,\mathrm{d}t &= \left[t - \frac{3t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{3t^2}{2} - t\right]_{\frac{1}{3}}^1 \\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{B = \frac{1}{2}}$$

3. La fonction $x \longmapsto x|x|$ est impaire sur le segment $[-1,1]$ et le segment $[-1,1]$ est symétrique par rapport à 0 donc :

$$\boxed{C = \int_{-1}^1 x|x|\,\mathrm{d}x = 0}$$

4. La fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{\lfloor x\rfloor\pi}{4}\right)$ est continue par morceaux et une subdivision adaptée est $(0,1,2,3,4)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}D = \sum_{k=0}^{3}\int_k^{k+1} \sin\left(\frac{\lfloor x\rfloor\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{3}\int_k^{k+1}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{3}(k+1-k)\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) \\ &= \sin(0)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{D = 1+\sqrt{2}}$$

5. On utilise une intégration par parties. En posant :
$$u'(x) = 1 \qquad v(x) = \operatorname{Arctan}(x)$$
$$u(x) = x \qquad v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
on a :
$$E = \Big[x\operatorname{Arctan}(x)\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1$$
Ainsi :
$$\boxed{E = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}}$$
6. On utilise encore une intégration par parties. En posant :
$$u'(x) = x \qquad v(x) = \operatorname{Arctan}(x)^2$$
$$u(x) = \frac{x^2+1}{2} \qquad v'(x) = 2\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{1+x^2}$$
on a :
$$F = \left[\frac{(x^2+1)\operatorname{Arctan}(x)}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \operatorname{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - E$$
Ainsi :
$$\boxed{F = \frac{\ln(2)}{2}}$$
7. On commence par linéariser la fonction $f : x \longmapsto \cos(x)^2\sin(3x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\cos(x)^2 = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \text{donc} \qquad f(x) = \frac{\sin(3x)+\sin(3x)\cos(2x)}{2}$$
Or :
$$\sin(3x)\cos(2x) = \frac{\sin(3x+2x)+\sin(3x-2x)}{2}$$
Finalement :
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{4} + \frac{\sin(3x)}{2} + \frac{\sin(5x)}{4}$$
On en déduit que :
$$G = \left[-\frac{\cos(x)}{4} - \frac{\cos(3x)}{6} - \frac{\cos(5x)}{20}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{20}$$
Ainsi :
$$\boxed{G = \frac{7}{15}}$$
8. La fonction H est continue par morceaux sur $[0,2]$ et une subdivision adaptée est $(0,1,2)$ donc :
$$\begin{aligned} H = \int_0^1 x(x-\lfloor x\rfloor)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x(x-\lfloor x\rfloor)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x(x-1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$
D'où :
$$\boxed{H = \frac{5}{12}}$$

Exercice 6

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(x) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}$$
Donc :
$$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)}$$
2. La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)^{-5} = \operatorname{sh}'(x)\operatorname{sh}(x)^{-5}$$
donc :
$$\boxed{\text{une primitive de } g \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ est } x \longmapsto -\frac{\operatorname{sh}(x)^{-4}}{4} = -\frac{1}{4\operatorname{sh}(x)^4}}$$
3. La fonction h est continue sur $\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, on a :
$$\begin{aligned} h(x) = \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2} = \frac{1-\sin(x)^2}{\sin(x)^2} &= \frac{1}{\sin(x)^2} - 1 \\ &= \left(-\frac{\cos}{\sin}\right)'(x) - 1 \\ &= \left(-\frac{1}{\tan}\right)'(x) - 1 \end{aligned}$$
Ainsi :

$$\boxed{\text{une primitive de } h \text{ sur } \mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \text{ est } x\longmapsto -\frac{1}{\tan(x)}-x}$$

4. La fonction i est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x>0, \qquad i(x)=\ln'(x)\sin(\ln(x))=-\ln'(x)\cos'(\ln(x))$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{une primitive de } i \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est } x\longmapsto -\cos(\ln(x))}$$

5. La fonction j est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle y admet des primitives. D'après le théorème fondamental de l'Analyse, une primitive de j sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

$$J:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. On calcule $J(x)$ à l'aide du changement de variable $t=\tan(u)$. Celui-ci nous donne (on a $\mathrm{d}t=(1+\tan(u)^2)\,\mathrm{d}u$) :

$$\begin{aligned}J(x)&=\int_0^{\operatorname{Arctan}(x)}\frac{1}{(1+\tan(u)^2)^3}\times(1+\tan(u)^2)\,\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\operatorname{Arctan}(x)}\frac{1}{(1+\tan(u)^2)^2}\,\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\operatorname{Arctan}(x)}\left(\cos(u)^2\right)^2\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\operatorname{Arctan}(x)}\cos(u)^4\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Pour tout $u\in\mathbb{R}$, on a $\cos(u)^2=\dfrac{\cos(2u)+1}{2}$ puis :

$$\begin{aligned}\cos(u)^4&=\frac{\cos(2u)^2+2\cos(2u)+1}{4}\\&=\frac{1}{4}\times\frac{\cos(4u)+1}{2}+\frac{\cos(2u)}{2}+\frac{1}{4}\\&=\frac{\cos(4u)}{8}+\frac{\cos(2u)}{2}+\frac{3}{8}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$J(x)=\left[\frac{\sin(4u)}{32}+\frac{\sin(2u)}{4}+\frac{3}{8}x\right]_0^{\operatorname{Arctan}(x)}$$

Ainsi :

$$\boxed{J:x\longmapsto\frac{\sin(4\operatorname{Arctan}(x))}{32}+\frac{\sin(2\operatorname{Arctan}(x))}{4}+\frac{3\operatorname{Arctan}(x)}{8}}$$

6. La fonction k est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème fondamental de l'Analyse, une primitive de h sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$K:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$$

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. On calcule $H(x)$ en utilisant le changement de variable $u=\sqrt{t+1}$ (on a $\mathrm{d}u=\frac{1}{2\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$) :

$$\begin{aligned}K(x)=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x+1}}\frac{2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u&=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u\\&=\Big[\ln(u-1)-\ln(u+1)\Big]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{une primitive de } k \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est } K:x\longmapsto \ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right)}$$

Exercice 7

Les intégrales I et J sont bien définies car les fonctions :

$$t\longmapsto\frac{\cos(t)^2}{\cos(2t)} \qquad \text{et} \qquad t\longmapsto\frac{\sin(t)^2}{\cos(2t)}$$

sont continues sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$.

1. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos(t)^2+\sin(t)^2}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$, on a $\cos(2t)=\dfrac{1-\tan(t)^2}{1+\tan(t)^2}$ donc :

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\tan(t)^2}{1-\tan(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $x=\tan(t)$ nous donne (puisque $\mathrm{d}x=(1+\tan(t)^2)\,\mathrm{d}t$) :

$$\begin{aligned} I+J=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big[-\ln(1-x)+\ln(1+x)\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{I+J=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)}$$

2. Par linéarité de l'intégrale, on a aussi :

$$\begin{aligned} I-J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos(t)^2-\sin(t)^2}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}1\,\mathrm{d}t \qquad \text{(formule de duplication du cosinus)} \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Les égalités :

$$I+J=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right) \qquad \text{et} \qquad I-J=\frac{\pi}{6}$$

fournissent les égalités :

$$\boxed{I=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right) \qquad \text{et} \qquad J=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{12}}$$

Exercice 8

Pour tous $p,q\in\mathbb{N}$, la fonction $x\longmapsto x^p(1-x)^q$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc l'intégrale $I(p,q)$ est bien définie.

1. Soit $q\in\mathbb{N}$. On a :

$$I(0,q)=\int_0^1 x^0(1-x)^q\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)^q\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall q\in\mathbb{N}, \qquad I(0,q)=\frac{1}{q+1}}$$

2. Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$. On utilise une intégration par parties. En posant :

$$\begin{aligned} u(x)&=x^p & v'(x)&=(1-x)^q \\ u'(x)&=px^{p-1}\ (\text{car } p\geqslant 1) & v(x)&=-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1} \end{aligned}$$

on a :

$$I(p,q)=\underbrace{\left[-\frac{x^p(1-x)^{q+1}}{1-q}\right]_0^1}_{=0\ (\text{car } p\geqslant 1)}+\frac{p}{q+1}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+1}\,\mathrm{d}x$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall (p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}, \qquad I(p,q)=\frac{p}{q+1}I(p-1,q+1)}$$

3. À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur l'entier $p\in\mathbb{N}$, montrons que :

$$\forall q\in\mathbb{N}, \qquad I(p,q)=\frac{p\,!\,q\,!}{(p+q+1)\,!}$$

- ⋆ Soit $q\in\mathbb{N}$. D'après la question 1., on sait que $I(0,q)=\dfrac{1}{q+1}$. De plus :

$$\frac{0\,!\,q\,!}{(q+1)\,!}=\frac{1}{q+1}=I(0,q)$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $p=0$.

- ⋆ Soit $p\in\mathbb{N}$. Supposons que :

$$\forall q\in\mathbb{N}, \qquad I(p,q)=\frac{p\,!\,q\,!}{(p+q+1)\,!}$$

Montrons que :

$$\forall q\in\mathbb{N}, \qquad I(p+1,q)=\frac{(p+1)\,!\,q\,!}{(p+q+2)\,!}$$

Soit $q\in\mathbb{N}$. Comme $p+1\in\mathbb{N}^*$, on a d'après la question 2. :

$$I(p+1,q)=\frac{p+1}{q+1}I(p,q+1)$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que :

$$\forall r\in\mathbb{N}, \qquad I(p,r)=\frac{p\,!\,r\,!}{(p+r+1)\,!}$$

Pour $r=q+1\in\mathbb{N}$, on a $I(p,q+1)=\dfrac{p\,!\,(q+1)\,!}{(p+q+2)\,!}$. Ainsi :

$$I(p+1,q)=\frac{p+1}{q+1}\times\frac{p\,!\,(q+1)\,!}{(p+q+2)\,!}=\frac{(p+1)\,!\,q\,!}{(p+q+2)\,!}$$

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall p,q\in\mathbb{N},\qquad I(p,q)=\frac{p\,!\,q\,!}{(p+q+1)\,!}}$$

Exercice 9 La fonction $x\longmapsto\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ est continue sur le segment $[0,1]$ (composée de fonctions continues) donc l'intégrale I est bien définie.
En utilisant le changement de variable indiqué, on a (puisque $\mathrm{d}x=-\sin(t)\,\mathrm{d}t$) :

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{\frac{1-\cos(t)}{1+\cos(t)}}(-\sin(t))\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos(t)}{1+\cos(t)}}\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\cos(t)=\cos\left(2\times\frac{t}{2}\right)=2\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2-1=1-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2$$

donc :

$$1-\cos(t)=2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\qquad\text{et}\qquad 1+\cos(t)=2\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2$$

Ainsi :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2}}\sin(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\left(\frac{t}{2}\right)|}{|\cos\left(\frac{t}{2}\right)|}\times2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\frac{t}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ donc $\cos\left(\frac{t}{2}\right)\geqslant0$ et $\sin\left(\frac{t}{2}\right)\geqslant0$ donc :

$$\begin{aligned}I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\times2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos(t))\,\mathrm{d}t\\&=\Big[t-\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi}{2}-1\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{I=\frac{\pi}{2}-1}$$

Exercice 10 Les intégrales I et J sont bien définies car les fonctions :

$$t\longmapsto\frac{t}{2+\sin(t)}\qquad\text{et}\qquad t\longmapsto\frac{1}{2+\sin(t)}$$

sont continues sur le segment $[0,\pi]$ (comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas par on a l'inégalité $\sin\geqslant-1$ sur $\mathbb{R}$).

1. On effectue le changement de variable $t=\pi-u$ dans l'intégrale I et on obtient :

$$\begin{aligned}I=\int_\pi^0\frac{\pi-u}{2+\sin(\pi-u)}(-1)\,\mathrm{d}u&=\int_0^\pi\frac{\pi-u}{2+\sin(u)}\,\mathrm{d}u\\&=\pi\int_0^\pi\frac{1}{2+\sin(u)}\,\mathrm{d}u-\int_0^\pi\frac{u}{2+\sin(u)}\,\mathrm{d}u\\&=\pi J-I\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{I=\frac{\pi}{2}J}$$

2. (a) La fonction $f:t\longmapsto\dfrac{1}{2+\sin(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (comme inverse d'une fonction continue, le dénominateur ne s'annulant pas car on a l'inégalité $\sin\geqslant-1$ sur $\mathbb{R}$) donc, d'après le théorème fondamental de l'Analyse, la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier continue. Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

(b) Soit $x\in]-\pi,\pi[$. Pour tout $t\in[\min(0,x),\max(0,x)]\subset]-\pi,\pi[$, on a :

$$\sin(t)=\frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

donc :

$$f(t)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}}=\frac{1}{2}\times\frac{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

Ainsi :

$$F(x)=\int_0^x\frac{1}{2}\times\frac{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ nous donne (on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[1 + \tan\left(\frac{t}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}u$) :

$$F(x) = \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{1+u+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Or, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$u^2+u+1 = \left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in]-\pi,\pi[, \qquad F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

(c) On sait que $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) \xrightarrow[x\to\pi^{-1}]{} +\infty$ et que $\operatorname{Arctan}(X) \xrightarrow[X\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$ donc, d'après le théorème de composition des limites, la fonction F admet une limite en π^- qui vaut :

$$\lim_{x\to\pi^-} F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle l'est en particulier à gauche en π. Ainsi :

$$F(\pi) = \lim_{x\to\pi^-} F(x) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Finalement :

$$\boxed{J = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad I = \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}}$$

Exercice 11

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $[x,2x] \subset \mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle l'est en particulier sur le segment $[x,2x]$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie. On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*}$$

2. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée f (d'après le théorème fondamental de l'Analyse). Or, d'après la relation de Chasles, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = F(2x) - F(x)$$

donc F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad F'(x) = 2F'(2x) - F'(x) &= 2 \times \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2x} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2x}(1-\mathrm{e}^{x})}{x} \end{aligned}$$

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\mathrm{e}^x > 1$, $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ et $x > 0$ donc $F'(x) < 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est (strictement) décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $x \leqslant 2x$ et pour tout $t \in [x,2x]$, on a $\mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ (par décroissance de $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u}$ sur $\mathbb{R}$) puis, en multipliant par $\dfrac{1}{t} \geqslant 0$:

$$\forall t \in [x,2x], \qquad \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{t}$$

Par croissance de l'intégrale, il vient (on a bien $x \leqslant 2x$ car $x > 0$) :

$$\mathrm{e}^{-2x}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t)\Big]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x)$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \mathrm{e}^{-2x}\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\ln(2)}$$

Comme $\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln(2)}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in [x, 2x]$, on a $t \geqslant x > 0$ puis $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{x}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi :

$$\forall t \in [x, 2x], \qquad 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x}$$

Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x}$$

Or $\dfrac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (opérations sur les limites) donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

Exercice 12

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto \sin(x-t)g(t)$ est continue sur le segment $[\min(0,x), \max(0,x)]$ (comme produit de fonctions continues) donc l'intégrale $f(x)$ est bien définie.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \big(\sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t)\big)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sin(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \cos(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto \cos(t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (comme produit de fonctions continues) donc, d'après le théorème fondamental de l'Analyse, la fonction F : $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \cos(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\cos \times g$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De même, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \sin(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme les fonctions cos et sin sont également de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

comme produits et différence de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \sin(x)\cos(x)g(x) \\ &\qquad - \left(-\sin(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \cos(x)\sin(x)g(x)\right) \\ &= \int_0^x \big(\cos(x)\cos(t) - \sin(x)\sin(t)\big)g(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

i.e. :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t)\,\mathrm{d}t}$$

2. En procédant comme à la question 1., on obtient que f' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (autrement dit, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = -\int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\big(\cos(x)^2 + \sin(x)^2\big)}_{=1}g(x)$$

Ainsi :

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ et on a l'égalité } f'' + f = g \text{ sur } \mathbb{R}}$$

3. L'équation différentielle proposée est linéaire du second ordre.
   - ⋆ L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\left\{x \longmapsto A\cos(x) + B\sin(x) \,\middle|\, A, B \in \mathbb{R}\right\}$$

   - ⋆ D'après ce qui précède, une solution particulière de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ est f.

Donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \left\{x \longmapsto f(x) + A\cos(x) + B\sin(x) \,\middle|\, A, B \in \mathbb{R}\right\}}$$

Exercice 13

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction cos est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\begin{aligned} \left|\cos(t) - \sum_{k=0}^{1} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k\,!}(t-0)^k\right| &\leqslant \frac{t^2}{2\,!} \sup_{u\in[\min(0,t),\max(0,t)]} \left|\cos^{(2)}(u)\right| \\ &\leqslant \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |\cos(t) - 1| \leqslant \frac{t^2}{2}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. L'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie car la fonction $t \longmapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc en particulier sur le segment $[x, 2x]$. De plus :

$$\begin{aligned}\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_x^{2x} \frac{\cos(t)-1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{2x} \frac{\cos(t)-1}{t}\,\mathrm{d}t + \ln(2)\end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \ln(2)\right| &\leqslant \int_{\min(x,2x)}^{\max(x,2x)} \frac{|\cos(t)-1|}{|t|}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{\min(x,2x)}^{\max(x,2x)} \frac{1}{|t|} \times \frac{t^2}{2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(question 1.)} \\ &= \left|\left[\frac{t^2}{4}\right]_{\min(x,2x)}^{\max(x,2x)}\right| \\ &= \frac{3x^2}{4}\end{aligned}$$

Or $\dfrac{3x^2}{4} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} \ln(2)}$$

Exercice 14

On utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

- ⋆ **Analyse :** soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2f(1) - 3\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (d'après le théorème fondamental de l'Analyse). L'égalité ci-dessus implique que f est également dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant cette relation, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -3f(x)$$

Il existe donc $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = A\,\mathrm{e}^{-3x}$$

Par ailleurs, le choix $x = 0$ dans la relation vérifiée par f nous donne l'égalité $f(0) = 2f(1)$. Or :

$$f(0) = 2f(1) \iff A = 2A\,\mathrm{e}^{-3} \iff \underbrace{(1 - 2\,\mathrm{e}^{-3})}_{\neq 0} A = 0 \iff A = 0$$

Ainsi, f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

- ⋆ **Synthèse :** la fonction nulle est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie bien la relation proposée.

Finalement :

$$\boxed{\text{la seule solution au problème posé est la fonction nulle } 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}}$$

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise une intégration par parties (ce qui est possible car la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$). En posant :

$$u'(x) = \mathrm{e}^{inx} \qquad v(x) = f(x)$$
$$u(x) = \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n} \qquad v'(x) = f'(x)$$

on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\mathrm{e}^{inx}}{n} f(x)\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}^{inb} - \mathrm{e}^{ina}}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire, on a (puisque $a \leqslant b$) :

$$\left|\int_a^b f'(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f'(x)| \times \underbrace{|\mathrm{e}^{inx}|}_{=1}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x}_{\text{noté } M} \in \mathbb{R}_+$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{n}$$

Or $\dfrac{M}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

De même, $\dfrac{\mathrm{e}^{inb}-\mathrm{e}^{ina}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0) donc :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Exercice 16

Soient $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise une intégration par parties (qui est possible car la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$). En posant :

$$\begin{aligned} u'(t) &= t^n & \qquad v(t) &= f(t) \\ u(t) &= \frac{t^{n+1}}{n+1} & \qquad v'(t) &= f'(t) \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} f(t)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t \qquad (1) \end{aligned}$$

On traite ensuite séparément chacun des deux termes.

- ⋆ On sait que $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to0}{=} 1+\mathrm{o}(1)$ et on a $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\big(1+\mathrm{o}(1)\big) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

  et donc :

$$\frac{f(1)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (2)$$

- ⋆ La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ donc f' est continue sur le segment $[0,1]$. D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f' est bornée sur ce segment. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in [0,1], \qquad |f'(t)| \leqslant M$$

  D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left|\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \underbrace{t^{n+1}}_{\geqslant 0} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

  D'après ce qui précède, on a la majoration :

$$\forall t \in [0,1], \qquad t^{n+1}|f'(t)| \leqslant M t^{n+1} \qquad (\text{car } t^{n+1} \geqslant 0)$$

  Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$\left|\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{n+2} \leqslant \frac{M}{n}$$

  Comme $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$, on a :

$$\left|\int_a^b t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{n+1}\left|\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M}{n^2}$$

  Autrement dit :

$$\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

  et donc :

$$\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (3)$$

L'égalité (1) et les estimations (2) et (3) permettent de conclure que :

$$\boxed{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Exercice 17

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^{2n+4}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^{2n+2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t)^2-1)\tan(t)^{2n+2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   Soit $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. La fonction tan étant croissante sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a :

$$0 \leqslant \tan(t) \leqslant 1 \qquad \text{puis} \qquad 0 \leqslant \tan(t)^2 \leqslant 1$$

   par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \qquad (\tan(t)^2-1)\tan(t)^{2n+2} \leqslant 0$$

   Par positivité de l'intégrale, on en déduit que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t)^2-1)\tan(t)^{2n+2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0 \qquad \textit{i.e.} \qquad u_{n+1}-u_n \leqslant 0$$

   Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}+u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan(t)^2)\tan(t)^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan'(t)\tan(t)^{2n+2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\tan(t)^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

On sait que $\tan(0)=0$ et que $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1}+u_n = \frac{1}{2n+3}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (u_k + u_{k-1}) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_{k-1} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k + \sum_{\ell=0}^{n-1} \underbrace{(-1)^{\ell+1}}_{-(-1)^\ell} u_\ell \qquad \text{(changement d'indice } \ell = k-1) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u_k \\ &= 1 + (-1)^n u_n - u_0 \qquad \text{(sommes télescopiques)} \end{aligned}$$

Or :

$$u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)^2\,\mathrm{d}t = \Big[\tan(t) - t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - ⋆ La suite $(u_\ell)_\ell$ est croissante donc $u_n \leqslant u_{n-1}$ puis $2u_n \leqslant u_n + u_{n-1}$ *i.e.* (d'après la question 2.) $u_n \leqslant \dfrac{1}{2(2n+1)}$.
   - ⋆ De la même manière, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc :

$$u_{n+1}+u_n \leqslant 2u_n \qquad i.e. \qquad \frac{1}{2(2n+3)} \leqslant u_n$$

   Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{2(2n+3)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2(2n+1)}$$

   Or $\dfrac{1}{2(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$ et $\dfrac{1}{2(2n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$ donc, d'après le théorème des gendarmes (version équivalent) :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}}$$

   Comme $\dfrac{1}{4n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $(-1)^n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0). La question 3. permet alors de conclure que :

$$\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}}$$

Exercice 18

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{(1+x^n)-(1+x^{n+1})}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

   Pour tout $x \in [0,1]$, on a $x^n \geqslant 0$, $1-x \geqslant 0$ et $(1+x^{n+1})(1+x^n) \geqslant 1 > 0$ donc :

$$\forall x \in [0,1], \qquad \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} \geqslant 0$$

   Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\,\mathrm{d}x \geqslant 0 \qquad i.e. \qquad u_{n+1}-u_n \geqslant 0$$

   Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$

(b) Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $1 + x^n \geqslant 1$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall x \in [0,1], \qquad \frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \qquad \textit{i.e.} \qquad u_n \leqslant 1$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1. Comme cette suite est de plus croissante, le théorème de la limite monotone permet de conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - ⋆ L'inégalité $1 - u_n \geqslant 0$ a été démontrée à la question précédente.
   - ⋆ De plus :

$$1 - u_n = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

Pour tout $x \in [0,1]$, on a vu que $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$ donc, en multipliant par $x^n \geqslant 0$, on obtient :

$$\forall x \in [0,1], \qquad \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$$

Par croissance de l'intégrale, on vient :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \qquad \textit{i.e.} \qquad 1 - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

On a $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $1 - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$1 - u_n = \int_0^1 \frac{x}{n} \times \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

On utilise ensuite une intégration par parties. En posant :

$$u(x) = \frac{x}{n} \qquad v'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$$
$$u'(x) = \frac{1}{n} \qquad v(x) = \ln(1+x^n)$$

on a :

$$1 - u_n = \left[\frac{x\ln(1+x^n)}{n}\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1 - u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x}$$

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$. L'inégalité de convexité du logarithme est :

$$\forall t \in]-1,+\infty[, \qquad \ln(1+t) \leqslant t$$

Ainsi :

$$\forall x \in [0,1], \qquad 0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$$

Par croissance de l'intégrale, on a :

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 3.(a), on a :

$$u_n - \left(1 - \frac{\ln(2)}{n}\right) = \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

donc :

$$\left|u_n - \left(1 - \frac{\ln(2)}{n}\right)\right| = \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

d'après la question 3.(b). Finalement :

$$u_n - \left(1 - \frac{\ln(2)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

i.e. :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Exercice 19

Soit $x \in [0,\pi]$.

★ La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$ donc, d'après la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral appliquée à f entre les points 0 et x, on a :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}\sin^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}\sin(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or :

$$\forall t \in [0,x], \qquad \frac{(x-t)^3}{6}\sin(t) \geqslant 0$$

donc, par positivité de l'intégrale, on a (puisque $0 \leqslant x$) :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}\sin(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \qquad \text{puis} \qquad \sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}$$

★ Pour la majoration, on utilise encore la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, cette fois à l'ordre 5. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in [0,\pi], \qquad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}$$

Exercice 20

Soient $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$. La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^{2n+2}$ sur $\mathbb{R}$ (elle y est de classe $\mathscr{C}^\infty$) donc, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a :

$$\begin{aligned}\left|\sin(x) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k\right| &\leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \sup_{t\in[\min(0,x),\max(0,x)]} \underbrace{\left|\sin^{(2n+2)}(t)\right|}_{\leqslant 1}\\ &\leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!},\end{aligned}$$

i.e. (en calculant les dérivées successives du sinus) :

$$\left|\sin(x) - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!}x^{2\ell+1}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Par croissances comparées, on a $\dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\sin(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}}$$

On procède de la même manière pour le cosinus.

Exercice 21

1. La fonction $x \in 1 + x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ (elle l'est en fait sur $\mathbb{R}$) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ où la fonction ln est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Par composition, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f : x \longmapsto \ln(1+x) \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-1,+\infty[}$$

On a $f^{(0)} = f$ et un raisonnement par récurrence permet d'obtenir :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}}$$

2. Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, comme f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $]-1,+\infty[$ (qui contient 0 et x), on a :

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[0,1]} \left|f^{(n+1)}(t)\right|$$

Pour tout $t \in [0,x]$, on a :

$$\left|f^{(n+1)}(t)\right| = \frac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leqslant n! \qquad \text{car} \qquad (1+t)^{n+1} \geqslant 1$$

Ainsi, $\displaystyle\sup_{t\in[0,1]} \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant n!$ et comme $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant 1$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Or $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x)}$$

Exercice 22

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \times \frac{n}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$. La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ donc, d'après le théorème sur les sommes de Riemann, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente de limite :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{Arctan}(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Finalement :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $v_n > 0$ donc (en utilisant les propriétés du logarithme) :

$$\begin{aligned} \ln(v_n) &= -\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) \\ &= -\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left[\ln(n) + \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right] \\ &= \underbrace{-\ln(n) + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n)}_{=\ln(n)}}_{=0} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

où $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) \end{array} \right.$. La fonction f est continue sur $[0,1]$ (elle l'est en fait sur $]-1,+\infty[$) donc, d'après le théorème sur les sommes de Riemann, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \ln(4) - 1 = \ln\left(\frac{4}{\mathrm{e}}\right)$$

Par continuité de la fonction exponentielle au point $\ln\left(\dfrac{4}{\mathrm{e}}\right)$ et d'après la caractérisation séquentielle de la limite, on a :

$$\boxed{v_n = \mathrm{e}^{\ln(v_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{4}{\mathrm{e}}\right)} = \frac{4}{\mathrm{e}}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le changement d'indice $k = n+\ell$ fournit :

$$w_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{n+\ell} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{\ell}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} f\left(\frac{\ell}{n}\right),$$

où $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x} \end{array} \right.$. La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc, d'après le théorème sur les sommes de Riemann, on a :

$$\boxed{w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2)}$$

2. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n = n^{\alpha+1} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{\alpha}\right)^{\alpha} = n^{\alpha+1} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{\alpha}\right),$$

où $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{\alpha} \end{array} \right.$ (la fonction f est bien définie en 0 car $\alpha > 0$) La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{\alpha}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}$$

Comme $\dfrac{1}{\alpha+1} \neq 0$, on a :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$$

(b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad y_n = n \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2 = n \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

où $f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(\pi x)^2 \end{cases}$. La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc, d'après le théorème sur les sommes de Riemann, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos(\pi x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\cos(2\pi x)+1}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\sin(2\pi x)}{4\pi} + \frac{x}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}}$$