# Intégration sur un segment

**Exercice 1 (égalité de la moyenne)** Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a < b$.

1. Montrer que, si $f$ ne s'annule pas sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$.
2. En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 2** Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a < b$. Montrer que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ si et seulement si $f$ est de signe constant sur $[a,b]$.

**Exercice 3** 1. Justifier que la fonction sin est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $F : x \longmapsto \int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

## 1 Calculs

**Exercice 4** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : t \in [0,1] \longmapsto \lfloor nt \rfloor$. Montrer que $f$ est une fonction en escalier sur $[0,1]$ et calculer $\int_{[0,1]} f$.

**Exercice 5** Calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \int_0^1 \min(t, 1-t)\,\mathrm{d}t$
2. $B = \int_0^1 |3t-1|\,\mathrm{d}t$
3. $C = \int_{-1}^1 x|x|\,\mathrm{d}x$
4. $D = \int_0^4 \sin\left(\frac{\lfloor x \rfloor \pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x$
5. $E = \int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$
6. $F = \int_0^1 x\arctan(x)^2\,\mathrm{d}x$
7. $G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2\sin(3x)\,\mathrm{d}x$
8. $H = \int_0^2 x(x - \lfloor x \rfloor)\,\mathrm{d}x$

**Exercice 6** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+5}$
2. $g : x \longmapsto \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)^5}$
3. $h : x \longmapsto \frac{1}{\tan(x)^2}$
4. $i : x \longmapsto \frac{\sin(\ln(x))}{x}$
5. $j : x \longmapsto \frac{1}{(1+x^2)^3}$
6. $k : x \longmapsto \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Pour la fonction $j$ (respectivement $k$), on utilisera le changement de variable $x = \tan(t)$ (respectivement $t = \sqrt{x+1}$).

**Exercice 7** On pose :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(t)^2}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(t)^2}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer $I + J$ en posant $x = \tan(t)$.
2. En déduire les valeurs de $I$ et $J$.

**Exercice 8** Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$$

1. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, calculer $I(0,q)$.
2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Trouver une relation entre $I(p,q)$ et $I(p-1,q+1)$.
3. En déduire la valeur de $I(p,q)$ dans le cas général.

**Exercice 9** En utilisant le changement de variable $x = \cos(t)$, calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

## 2 Fonctions définies par une intégrale

**Exercice 10** On pose :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{t}{2+\sin(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Trouver une relation simple entre $I$ et $J$ en effectuant le changement de variable $t = \pi - u$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2+\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

   (a) Montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout $x \in ]-\pi, \pi[$, calculer $F(x)$ en utilisant le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.
   (c) En déduire les valeurs de $J$ et $I$.

**Exercice 11** On considère la fonction $f : x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de $f$.
2. Quel est le signe de $f$ ?
3. Prolonger $f$ par continuité où cela est possible.
4. Montrer que $f$ est dérivable et étudier les variations de $f$. Préciser également la limite de $f$ en $+\infty$.
5. Étudier la convexité de $f$ et représenter graphiquement $f$.

**Exercice 12** On considère la fonction $f : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que la fonction $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \mathrm{e}^{-2x}\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\ln(2)$$
   En déduire la limite de $f$ en 0.
4. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**Exercice 13** Soit $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t)\,\mathrm{d}t$$
2. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que :
$$f'' + f = g$$
3. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = g$.

**Exercice 14** On considère la fonction $f$ d'expression :

$$f : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$$

1. Justifier que $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la parité de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les limites de $f$ en 0 et en $--\infty$ et en $+\infty$.

**Exercice 15**
1. Montrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |\cos(t)-1| \leqslant \frac{t^2}{2}$$
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 16** Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2f(1) - 3\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

## 3 Suites d'intégrales

**Exercice 17 (lemme de Riemann-Lebesgue)** Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, où $a < b$.

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
2. En déduire que
$$\int_a^b f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

**Exercice 18** Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Exercice 19** Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^{2n+2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

1. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n + u_{n+1}$.
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$$
4. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

**Exercice 20** Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. (a) Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$
   En déduire la limite de la suite.
3. (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1 - u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$
   (b) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$$
   (c) En déduire que :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

## 4 Formules de Taylor

**Exercice 21** Montrer que :

$$\forall x \in [0,\pi], \qquad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

**Exercice 22** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,!} x^{2k+1} \qquad \text{et} \qquad \cos(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)\,!} x^{2k}$$

**Exercice 23**
1. Déterminer (en justifiant leur existence) les dérivées successives de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$.
2. En déduire que :
$$\forall x \in [0,1], \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x)$$

## 5 Sommes de Riemann

**Exercice 24**
1. Déterminer la limite des suites de termes généraux suivants :

(a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$ (b) $v_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k)}$ (c) $w_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

2. Déterminer un équivalent simple, quand $n$ tend vers $+\infty$, des expressions suivantes :

(a) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ $(\alpha > 0)$ (b) $y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2$

**Exercice 25** Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente de limite $\exp\left(\displaystyle\int_{[0,1]} f\right)$.