Groupes, anneaux, corps

1 Lois de compositions internes

Exercice 1 Pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, on pose :

$$x \star y = x + y - xy$$

1. Montrer que $([0, 1], \star)$ est un magma commutatif et associatif. Possède-t-il un élément neutre ?
2. Quels sont les éléments inversibles de $([0, 1], \star)$?

Exercice 2 On définit une loi de composition interne $*$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad a * b = \ln(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b)$$

Quelles sont les propriétés de $*$? Possède-t-elle un élément neutre ? Y a-t-il des éléments inversibles ?

2 Groupes

Exercice 3 Pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on pose :

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$ est un groupe. Ce groupe est-il commutatif ?
2. Montrer que $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \star)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$.
3. Calculer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'élément $(x, y)^n$.

Exercice 4 On définit sur l'ensemble $G =]-1, 1[$ l'opération $\star$ par :

$$\forall x, y \in G, \qquad x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

1. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe.
2. (a) Soit $(A, *)$ un groupe, $(B, \triangle)$ un magma et $f \in B^A$ une application telle que :

$$\forall a, a' \in A, \qquad f(a * a') = f(a) \triangle f(a')$$

Montrer que $(f(A), \triangle)$ est un groupe.

(b) Retrouver alors le résultat de la question 1.

Exercice 5 Montrer que :

$$H = \left\{ x + y\sqrt{3} \,\middle|\, x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{Z},\ x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Exercice 6 Soient A un ensemble non vide, $(G, \star)$ un groupe et $\varphi : A \longrightarrow G$ une application bijective. On définit sur l'ensemble A l'opération $\triangle$ par :

$$\forall a, b \in A, \qquad a \triangle b = \varphi^{-1}(\varphi(a) \star \varphi(b))$$

Montrer que $(A, \triangle)$ est un groupe.

Exercice 7

1. Soient G un groupe commutatif fini d'élément neutre noté e et soit $g \in G$.
   (a) Montrer que l'application $t_g : x \longmapsto gx$ est bijective de G sur G.
   (b) Montrer, en calculant de deux manières différentes le produit $\prod_{x \in G} (gx)$, que l'on a l'égalité $g^{|G|} = e$, où $|G|$ désigne le nombre d'éléments de G.
2. Montrer que les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$ sont les groupes $\mathbb{U}_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 (théorème de Lagrange) Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G.

1. On définit sur G une relation binaire $\sim$ définie par :

$$\forall x, y \in G, \qquad x \sim y \iff \exists\, h \in H,\ y = xh$$

   Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G et déterminer la classe d'équivalence d'un élément quelconque x de G.
2. En déduire le *théorème de Lagrange* selon lequel $|H|$ divise $|G|$.
3. Soient H et K deux sous-groupes de H tels que $\mathrm{pgcd}(|H|, |K|) = 1$. Que peut-on dire de $H \cap K$?

Exercice 9 Soit G un groupe. Montrer que l'application $i : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array} \right.$ est un endomorphisme de G si et seulement si le groupe G est commutatif.

1. (a) Montrer que pour tout $g \in G$, il existe $x_g \in G$ tel que $g = x_g \phi(x_g^{-1})$.

(b) Montrer que pour tout $g \in G$, on a $\phi(g) = g^{-1}$.

(c) En déduire que le groupe G est commutatif.

Exercice 10 (centralisateur et centre) Soit $(G, *)$ un groupe.

1. Soit $x \in G$. On appelle *centralisateur de x dans G*, noté $C_G(x)$, l'ensemble des éléments de G qui commutent avec x. Montrer que $C_G(x)$ est un sous-groupe de G.
2. On appelle *centre de G*, noté $Z(G)$, l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 11 1. Déterminer deux sous-groupes de $\mathbb{R}^*$ dont la réunion n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$.

2. Soient G un groupe et $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-groupes de G (ce qui signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $H_n \subset H_{n+1}$). Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ est un sous-groupe de G.

3 Morphismes de groupes

Exercice 12 1. Montrer que les applications suivantes sont des morphismes de groupes et déterminer leur noyau et leur image :

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{|x|} \end{array} \right.$ (b) $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \dfrac{z}{|z|} \end{array} \right.$

(c) $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{i\theta} \end{array} \right.$ (d) $j : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^{z} \end{array} \right.$

2. On note $\mathbb{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1. Montrer que l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \\ z & \longmapsto & \left(|z|, \dfrac{z}{|z|}\right) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de groupes, $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$ étant muni de sa structure naturelle de groupe produit.

Exercice 13 Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Pour tout élément g de G, on considère l'application :

$$c_g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array} \right.$$

Ici, gxg^{-1} désigne l'élément $g \cdot x \cdot g^{-1}$.

1. Montrer que pour tout $g \in G$, l'application c_g est un automorphisme de G.
2. Montrer que l'ensemble $\left\{c_g \,\middle|\, g \in G\right\}$ est un sous-groupe de $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$, où $\mathrm{Aut}(G)$ désigne le groupe des automorphismes de G.
3. Montrer que l'application :

$$c : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(G) \\ g & \longmapsto & c_g \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes et déterminer son noyau.

Exercice 14 Soit $(G, \times)$ un groupe d'élément neutre noté e.

1. On suppose que :

$$\forall x \in G, \qquad x^2 = e$$

Montrer que le groupe G est commutatif.

2. On suppose que l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^3 \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes surjectif.

(a) Montrer que, pour tout $x, y \in G$, on a $(xy)^2 = y^2x^2$.

(b) En déduire que G est commutatif.

Exercice 15 On définit sur $\mathbb{R}$ l'opération $\star$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad x \star y = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$$

Montrer que l'application sh est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}, \star)$ et que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe commutatif.

4 Anneaux, corps

Exercice 16 On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble $\left\{a + ib \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau (pour les opérations d'addition et de multiplication usuelles). Cet anneau est appelé l'*anneau de Gauss*.

On considère sur $\mathbb{Z}[i]$ l'application $N : z \longmapsto z\overline{z}$. On note $\mathscr{U}(\mathbb{Z}[i])$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, on a :

$$z \in \mathscr{U}(\mathbb{Z}[i]) \iff N(z) = 1$$

En déduire $\mathscr{U}(\mathbb{Z}[i])$.

Exercice 17 Soient A un anneau et $x \in A$. On dit que x est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$.

1. Montrer que, si A est intègre, alors 0_A est le seul élément nilpotent de A.
2. Montrer que la somme et le produit de deux éléments nilpotents qui commutent sont encore nilpotents.
3. Soient x un élément nilpotent de A et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$. Calculer :

$$(1_A - x) \times \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

En déduire que $1_A - x$ est inversible et déterminer $(1_A - x)^{-1}$.

Exercice 18 Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On suppose que A est un *anneau de Boole*, *i.e.* est tel que :

$$\forall x \in A, \qquad x^2 = x$$

1. Montrer que A est commutatif.
2. Déterminer A dans le cas où A est intègre.
3. On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur A en posant :

$$\forall x, y \in A, \qquad x \preccurlyeq y \iff yx = x$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur A.

Exercice 19 On définit sur $I =]0, +\infty[$ l'opération $\star$ par :

$$\forall x, y \in I, \qquad x \star y = x^{\ln(y)}$$

1. Vérifier que $\star$ définit bien une loi de composition interne sur I.
2. Montrer que $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est un isomorphisme d'anneaux de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sur $(I, \cdot, \star)$ et en déduire que $(I, \cdot, \star)$ est un corps commutatif.

Exercice 20 Soient A et B deux corps et $f \in B^A$ un morphisme d'anneaux tel que $f \neq 0_{B^A}$. Montrer que f est injectif.

Exercice 21 Soit $f : (\mathbb{R}, +, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, \times)$ un morphisme d'anneaux.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(nx) = nf(x)$.
2. En déduire que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(r) = r$.
3. Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $f(x) \geqslant 0$. En déduire que la fonction f est croissante.
4. Montrer que pour tout nombre réel x, il existe des suites de nombres rationnels $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergentes vers x telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant x \leqslant v_n$. Conclure que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.