

GROUPES, ANNEAUX, CORPS

1 Lois de compositions internes

Exercice 1 Pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, on pose :

$$x \star y = x + y - xy$$

1. Montrer que $([0, 1], \star)$ est un magma commutatif et associatif. Possède-t-il un élément neutre ?
2. Quels sont les éléments inversibles de $([0, 1], \star)$?

Exercice 2 On définit une loi de composition interne $*$ sur \mathbb{R} par :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a * b = \ln(e^a + e^b)$$

Quelles sont les propriétés de $*$? Possède-t-elle un élément neutre ? Y a-t-il des éléments inversibles ?

2 Groupes

Exercice 3 Pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on pose :

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$ est un groupe. Ce groupe est-il commutatif ?
2. Montrer que $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \star)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$.
3. Calculer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'élément $(x, y)^n$.

Exercice 4 On définit sur l'ensemble $G =]-1, 1[$ l'opération \star par :

$$\forall x, y \in G, \quad x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

1. Montrer que (G, \star) est un groupe.
2. Retrouver ce résultat en montrant que l'application th est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sur (G, \star) .

Exercice 5 Montrer que :

$$H = \{x + y\sqrt{3} \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1\}$$

est un sous-groupe de (\mathbb{R}_+^*, \times) .

Exercice 6 Soient A un ensemble non vide, (G, \star) un groupe et $\phi : A \rightarrow G$ une application bijective. On définit sur l'ensemble A l'opération Δ par :

$$\forall a, b \in A, \quad a \Delta b = \phi^{-1}(\phi(a) \star \phi(b))$$

Montrer que (A, Δ) est un groupe.

Exercice 7 1. Soient G un groupe commutatif fini d'élément neutre noté e et soit $g \in G$.

(a) Montrer que l'application $t_g : x \mapsto gx$ est bijective de G sur G .

(b) Montrer, en calculant de deux manières différentes le produit $\prod_{x \in G} (gx)$, que l'on a l'égalité $g^{|G|} = e$, où $|G|$ désigne le nombre d'éléments de G .

2. Montrer que les sous-groupes finis de \mathbb{C}^* sont les groupes U_n , où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 Soit G un groupe. Montrer que l'application $i : \begin{cases} G & \rightarrow G \\ g & \mapsto g^{-1} \end{cases}$ est un endomorphisme de G si et seulement si le groupe G est commutatif.

Exercice 9 (centralisateur d'un élément et centre d'un groupe) Soit G un groupe.

1. Soit $x \in G$. On appelle *centralisateur de x dans G* , noté $C_G(x)$, l'ensemble des éléments de G qui commutent avec x . Montrer que $C_G(x)$ est un sous-groupe de G .
2. On appelle *centre de G* , noté $Z(G)$, l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G . Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G .

3 Morphismes de groupes

Exercice 10 1. Montrer que les applications suivantes sont des morphismes de groupes et déterminer leur noyau et leur image :

$$(a) \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto \frac{x}{|x|} \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \mathbb{C}^* & \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto \frac{z}{|z|} \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C}^* \\ \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto e^z \end{cases}$$

2. On note \mathbb{U} le groupe des nombres complexes de module 1. Montrer que l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \\ z & \longmapsto & \left(|z|, \frac{z}{|z|} \right) \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes, $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$ étant muni de sa structure naturelle de groupe produit.

Exercice 11 Soit (G, \times) un groupe d'élément neutre noté e .

1. On suppose que :

$$\forall x \in G, \quad x^2 = e$$

Montrer que le groupe G est commutatif.

2. On suppose que l'application :

$$\varphi : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^3 \end{cases}$$

est un morphisme de groupes surjectif.

(a) Montrer que, pour tout $x, y \in G$, on a $(xy)^2 = y^2x^2$.

(b) En déduire que G est commutatif.

Exercice 12 On définit sur \mathbb{R} l'opération \star par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \star y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$$

Montrer que l'application sh est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sur (\mathbb{R}, \star) et que (\mathbb{R}, \star) est un groupe commutatif.

4 Anneaux, corps

Exercice 13 On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble $\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau (pour les opérations d'addition et de multiplication). Cet anneau est appelé l'*anneau de Gauss*.

On considère sur $\mathbb{Z}[i]$ l'application $N : z \mapsto z\bar{z}$. On note $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, on a :

$$z \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[i]) \iff N(z) = 1$$

En déduire $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$.

Exercice 14 Soient A un anneau et $x \in A$. On dit que x est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$.

1. Montrer que, si A est intègre, alors 0_A est le seul élément nilpotent de A .
2. Montrer que la somme et le produit de deux éléments nilpotents qui commutent sont encore nilpotents.
3. Soient x un élément nilpotent de A et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$. Calculer :

$$(1_A - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

En déduire que $1_A - x$ est inversible et déterminer $(1_A - x)^{-1}$.

Exercice 15 Soit A un anneau. On suppose que A est un *anneau de Boole*, i.e. est tel que :

$$\forall x \in A, \quad x^2 = x$$

1. Montrer que A est commutatif.
2. Déterminer A dans le cas où A est intègre.

Exercice 16 On définit sur $I =]0, +\infty[$ l'opération \star par :

$$\forall x, y \in I, \quad x \star y = x^{\ln(y)}$$

1. Vérifier que \star définit bien une loi de composition interne sur I .
2. Montrer que $f : x \mapsto e^x$ est un isomorphisme d'anneaux de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sur (I, \cdot, \star) et en déduire que (I, \cdot, \star) est un corps commutatif.

Exercice 17 Soient A et B deux corps. Montrer que si $f : A \rightarrow B$ est un morphisme non nul d'anneaux, alors f est injectif.

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme non nul d'anneaux.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(n) = n$.
2. En déduire que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(r) = r$.
3. Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $f(x) \geq 0$. En déduire que la fonction f est croissante.
4. Montrer que pour tout nombre réel x , il existe des suites de nombres rationnels $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ convergentes vers x telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq x \leq v_n$. Conclure que $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.