

FRACTIONS RATIONNELLES

(corrigés)

Exercice 1 On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $F \in \mathbb{C}(X)$ tel que $F^2 = X$. Notons $n \in \mathbb{Z}$ le degré de la fraction rationnelle F . Comme $F^2 = X$, on a $\deg(F^2) = \deg(X) = 1$, *i.e.* (d'après les opérations sur le degré dans $\mathbb{C}(X)$) :

$$2 \deg(F) = 1 \quad \text{i.e.} \quad 2n = 1$$

Ceci est absurde car n est un entier. Ainsi :

il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F^2 = X$

Exercice 2

1. On obtient :

(a) $F = \frac{1}{X+1} - \frac{1}{2X+1}.$

(b) $G = X^2 - 2X - 1 + \frac{12X+5}{X^2+2X+5}$

(c) $H = \frac{2-X}{8(X^2+4)} + \frac{1}{8(X+2)}$

(d) $I = -\frac{X}{2(X^2+1)} + \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)}$

2. Les intégrandes sont des fonctions rationnelles. On décompose en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles correspondantes.

(a) On a :

$$I = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3} \right) dt = \left[\ln(t+2) - \ln(t+3) \right]_{-1}^1 = \ln(3) - \ln(4) - (\ln(1) - \ln(2))$$

donc :

$$I = \ln(3) - \ln(2)$$

(b) On a :

$$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} \right) dt = \left[-\frac{1}{t} + \ln(t+1) - \ln(t) \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + \ln(3) - \ln(2) - (-1 + \ln(2))$$

donc :

$$I = \frac{1}{2} + \ln(3) - 2\ln(2)$$

(c) On a :

$$K = \int_0^1 \left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2(t+1)} \right) dt = \left[\frac{\ln(t^2+1)}{4} + \frac{\text{Arctan}(t)}{2} - \frac{\ln(t+1)}{2} \right]_0^1$$

Ainsi :

$$K = \frac{\ln(2)}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{\ln(2)}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln(2)}{4}$$

(d) On a :

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \left(\frac{2-t}{2(t^2-2t+2)} + \frac{1}{2t} \right) dt \\ &= \int_1^2 \left(\frac{2-2t}{4(t^2-2t+2)} + \frac{1}{2t} \right) dt + \frac{1}{2} \times \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{t^2-2t+2} dt}_{\text{notée } \tilde{L}} \\ &= \left[-\frac{\ln(t^2-2t+2)}{4} + \frac{\ln(t)}{2} \right]_1^2 + \frac{\tilde{L}}{2} \\ &= -\frac{\ln(2)}{4} + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\tilde{L}}{2} \\ &= \frac{\ln(2)}{4} + \frac{\tilde{L}}{2} \end{aligned}$$

Calculons maintenant $\tilde{L}$:

$$\tilde{L} = \int_1^2 \frac{1}{(t-1)^2+1} dt = \left[\text{Arctan}(t-1) \right]_1^2 = \frac{\pi}{4}$$

Finalement :

$$L = \frac{\ln(2)}{4} + \frac{\pi}{8}$$

Exercice 3 Soient $m, n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$X^m = ((X-1) + 1)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (X-1)^k$$

Par conséquent :

$$F_{m,n} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (X-1)^{k-n} = \underbrace{\sum_{k=n}^m \binom{m}{k} (X-1)^{k-n}}_{\text{noté } P} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{m}{k}}{(X-1)^{n-k}}}_{\text{noté } G}$$

On a $\deg(G) \leq -1$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donc :

la partie entière de $F_{m,n}$ est $E(F_{m,n}) = P = \sum_{k=n}^m \binom{m}{k} (X-1)^{k-n}$

et la décomposition en éléments simples de $F_{m,n}$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$F_{m,n} = \sum_{k=n}^m \binom{m}{k} (X-1)^{k-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{m}{k}}{(X-1)^{n-k}}$$

Exercice 4

1. Dans cette question, on demande de faire la démonstration du résultat sur la dérivée logarithmique.

Par définition de P , on a $P = C_P \prod_{k=1}^n (X - a_k)^{m_k}$, en notant $C_P \in \mathbb{C}^*$ le coefficient dominant de P . Le polynôme dérivée de P est :

$$\begin{aligned} P' &= C_P \sum_{k=1}^n m_k (X - a_k)^{m_k-1} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n (X - a_\ell)^{m_\ell} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - a_k} \times C_P \underbrace{\prod_{\ell=1}^n (X - a_\ell)^{m_\ell}}_{=P} \\ &= P \times \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - a_k} \end{aligned}$$

Comme $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$, on a bien :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - a_k}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Considérons le polynôme $P = \frac{X^n - 1}{X - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$. L'ensemble des racines complexes de P est $\mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ et les racines de P sont toutes simples. D'après la question précédente, on a :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{X - \omega} \quad \text{donc} \quad \frac{P'(1)}{P(1)} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega}$$

Or $P(1) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$ et :

$$P' = \sum_{k=1}^{n-1} k X^{k-1} \quad \text{donc} \quad P'(1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ainsi :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega} = \frac{n-1}{2}$$

Exercice 5

1. Le polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $C_P \in \mathbb{R}^*$, des nombres réels $a_1, \dots, a_n$ deux à deux distincts et des entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_n$ tels que :

$$P = C_P \prod_{k=1}^n (X - a_k)^{m_k}$$

D'après le cours sur la dérivée logarithmique, la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\frac{P'}{P}$ est :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - a_k}$$

2. On a (en dérivant la fraction rationnelle précédente) :

$$\frac{P''P - (P')^2}{P^2} = - \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{(X - a_k)^2} \quad i.e. \quad \frac{(P')^2 - P''P}{P^2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{(X - a_k)^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, on a donc :

$$P'(x)^2 - P''(x)P(x) = P(x)^2 \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{(x - a_k)^2} \geq 0 \quad (\text{l'inégalité est même stricte})$$

(*)

De plus, si $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$ (i.e. si x est une racine de P), alors $P(x) = 0$ et comme $P'(x)^2 \geq 0$, l'inégalité reste vraie. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x)^2 \geq P(x)P''(x)}$$

On traite maintenant le cas d'égalité en raisonnant par double implication.

- ★ Si $x \in \mathbb{R}$ est une racine multiple de P (i.e. une racine au moins double), alors $P(x) = P'(x) = 0$. On a donc $P'(x)^2 = 0 = P(x)P''(x)$.
- ★ Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x n'est pas une racine de P , alors l'inégalité (*) est stricte. On a donc $P'(x)^2 \neq P''(x)P(x)$. Par contraposition, si on a l'égalité $P'(x)^2 = P''(x)P(x)$, alors x est une racine de P . On a donc $P(x) = 0$ et l'égalité précédente nous donne $P'(x)^2$ i.e. $P'(x) = 0$. Ainsi, x est une racine multiple de P .

Finalement :

$$\boxed{\text{on a égalité si et seulement si } x \text{ est une racine multiple de } P}$$

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}$. La partie entière de F_n est nulle car $\deg(F_n) = -n-1 < 0$. D'après le théorème sur la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F_n = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{X+k}$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En multipliant par $X+k$ dans l'égalité précédente, on a :

$$\frac{1}{X(X+1)\cdots(X+k-1)(X+k+1)\cdots(X+n)} = \lambda_k + (X+k) \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^n \frac{\lambda_\ell}{X+\ell}$$

En évaluant en $-k$, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{1}{(-k)(-k+1)\cdots(-1) \times 1 \cdots (n-k)} \\ &= \frac{1}{(-1)^k k! (n-k)!} \\ &= \frac{(-1)^k}{k! (n-k)!} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{F_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! (n-k)!} \times \frac{1}{X+k}}$$

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Les pôles de F_n sont les racines n^{e} de l'unité. Tous les pôles sont simples, sauf 1 qui est un pôle double. De plus, $E(F_n) = 0_{\mathbb{C}[X]}$ car $\deg(F_n) = -n-1 < 0$. D'après le théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, il existe $\lambda_0, \mu_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que :

$$F_n = \frac{\lambda_0}{X-1} + \frac{\mu_0}{(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega_k}$$

où on a posé $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

- ★ Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Posons $Q = (X-1)(X^n-1)$. On multiplie F_n par $X-\omega_k$:

$$\frac{X-\omega_k}{Q} = \frac{X-\omega_k}{Q-Q(\omega_k)} = \lambda_k + (X-\omega_k) \left(\frac{\lambda_0}{X-1} + \frac{\mu_0}{(X-1)^2} + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n-1} \frac{\lambda_\ell}{X-\omega_\ell} \right)$$

Or :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \omega_k} \frac{X-\omega_k}{Q(x)-Q(\omega_k)} &= \frac{1}{Q'(\omega_k)} \\ &= \frac{1}{(\omega_k^n - 1) + (\omega_k - 1)n\omega_k^{n-1}} \\ &= \frac{\omega_k}{n(\omega_k - 1)} \end{aligned}$$

- ★ Pour déterminer μ_0 , on multiplie F_n par $(X-1)^2$ et on évalue en 1. On a :

$$(X-1)^2 F_n = \frac{1}{1+X+X^2+\cdots+X^{n-1}}$$

$$\text{donc } \mu_0 = \frac{1}{n}.$$

- ★ Pour déterminer λ_0 , on multiplie F_n encore par $(X-1)^2$:

$$(X-1)^2 F_n = \frac{1}{1+X+\cdots+X^{n-1}} = \lambda_0(X-1) + \mu_0 + (X-1)^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega_k}$$

On dérive et on obtient :

$$-\frac{1+2X+3X^2+\cdots+(n-1)X^{n-2}}{(1+X+\cdots+X^{n-1})^2} = \lambda_0 + 2(X-1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega_k} - (X-1)^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{(X-\omega_k)^2}$$

En évalue ensuite en 1 :

$$\lambda_0 = -\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2} = -\frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1-n}{2n}$$

Exercice 8

1. (a) On a :

$$F = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4X+1} - \frac{1}{4X+5} \right)$$

(b) La somme est télescopique :

$$S_n = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4n+5} \right)$$

Ainsi :

$$S_n = \frac{1}{20} - \frac{1}{4(4n+5)}$$

2. On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X+1)(X+2)}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(X+1)(X+2)} &= \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{X+2} \right) \end{aligned}$$

Par linéarité de la somme :

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

donc :

$$T_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}$$

Exercice 9

★ Calcul de l'intégrale I

Le changement de variable proposé fournit :

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{4-u^2} du = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2-u} + \frac{1}{2+u} \right) du = \frac{\ln(3)}{2}$$

★ Calcul de l'intégrale J

On a :

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)^2} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{1-\cos(t)^2} dt$$

Le changement de variable proposé fournit :

$$J = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

★ Calcul de l'intégrale K

On a :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)^4} dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(t)}{(1-\sin(t)^2)^2} dt$$

donc le changement de variable proposé fournit :

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-u^2)^2} du = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-u)^2(1+u)^2} du$$

On décompose en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\frac{1}{(1-X)^2(1+X)^2}$.

On obtient :

$$\frac{1}{(1-X)^2(1+X)^2} = \frac{1}{4(X+1)} + \frac{1}{4(X+1)^2} - \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X-1)^2}$$

On obtient finalement :

$$K = \frac{1}{3} + \frac{\ln(3)}{4}$$

Exercice 10

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On utilise une intégration par parties. En posant :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{(t^2 + 1)^{n+1}} = (t^2 + 1)^{-n-1} & v'(t) &= 1 \\ u'(t) &= -\frac{2(n+1)t}{(t^2 + 1)^{n+2}} & v(t) &= t \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \left[\frac{t}{(t^2 + 1)^{n+2}} \right]_0^x + 2(n+1) \int_0^x \frac{t^2}{(t^2 + 1)^{n+2}} dt \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^{n+2}} + 2(n+1) \int_0^x \left(\frac{1}{(t^2 + 1)^{n+1}} - \frac{1}{(t^2 + 1)^{n+2}} \right) dt \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^{n+2}} + 2(n+1)I_n(x) - 2(n+1)I_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$2(n+1)I_{n+1}(x) = (2n+1)I_n(x) + \frac{x}{(x^2 + 1)^{n+2}}$$

Finalement :

$$\boxed{I_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{2(n+1)}I_n(x) + \frac{x}{2(n+1)(x^2 + 1)^{n+2}}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $F : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x \frac{1}{(t^2 + 1)^{n+1}} dt \end{cases}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

En effet, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(t^2 + 1)^{n+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème fondamental de l'Analyse, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}} \geq 0$$

De plus, la fonction F est majorée sur $\mathbb{R}_+$ car :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{(t^2 + 1)^{n+1}} \leq \frac{1}{t^2 + 1}$$

puis (par croissance de l'intégrale) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) \leq \int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt = \text{Arctan}(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

La fonction F est croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$ donc, d'après le théorème de la limite monotone, la fonction F admet une limite finie en $+\infty$. Notons $\ell_n \in \mathbb{R}$ cette limite.

Pour déterminer ℓ_n , on utilise la relation de récurrence obtenue à la question 1. On a $x^2 + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ donc :

$$\frac{x}{(x^2 + 1)^{n+2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n+3}}$$

Comme $\frac{1}{x^{2n+3}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on a $\frac{x}{(x^2 + 1)^{n+2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. En faisant tendre x vers $+\infty$ dans la relation de récurrence, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ell_{n+1} = \frac{2n+1}{2(n+1)}\ell_n \quad (*)$$

De plus :

$$\ell_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a (d'après la relation de récurrence $(*)$) :

$$\ell_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2(k+1)} \right) \ell_0$$

où :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2(k+1)} &= \frac{1}{2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n (2k)} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ell_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n}}$$