

FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 1 Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F^2 = X$.

Exercice 2 1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$(a) F = \frac{X}{(X+1)(2X+1)}$$

$$(b) G = \frac{X^4}{X^2+2X+5}$$

$$(c) H = \frac{1}{(X^2+4)(X+2)}$$

$$(d) I = \frac{X}{X^4-1}$$

Décomposer également I en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

2. Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) I = \int_{-1}^1 \frac{1}{(t+2)(t+3)} dt$$

$$(b) J = \int_1^2 \frac{1}{t^2(t+1)} dt$$

$$(c) K = \int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)(t+1)} dt$$

$$(d) L = \int_1^2 \frac{1}{t(t^2-2t+2)} dt$$

Exercice 3 Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \geq n$. Déterminer la partie entière de fraction rationnelle $F_{m,n} = \frac{X^m}{(X-1)^n}$ et décomposer $F_{m,n}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Indication : $X = (X-1) + 1$.

Exercice 4 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme admettant n racines distinctes notées $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note m_k la multiplicité de a_k comme racine de P . Montrer que :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - a_k}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. En utilisant la question précédente, déterminer la valeur de la somme $S = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega}$.

Exercice 5 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\frac{P'}{P}$.

2. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x)^2 \geq P(x)P''(x),$$

avec égalité si et seulement si x est racine multiple de P .

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle :

$$F_n = \frac{1}{X(X+1) \cdots (X+n)}$$

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle :

$$F_n = \frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$$

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

- (a) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction $F = \frac{1}{(4X+1)(4X+5)}$.
- (b) En déduire la valeur de S_n .
- Procéder de la même manière pour calculer la somme T_n .

Exercice 9 Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{4 - \cos(t)^2} dt, \quad J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin(t)} dt \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(t)^3} dt$$

en posant $u = \cos(t)$ pour I et J et $u = \sin(t)$ pour K .

Exercice 10 Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}} dt$$

- Exprimer $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
- En déduire, pour tout entier naturel n , l'existence de la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}} dt$ et la calculer. Cette limite est notée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}} dt$.