Fractions rationnelles

Exercice 1

1. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

(a) $\dfrac{X}{X^4-1}$ (b) $\dfrac{X}{(X+1)(2X+1)}$

(c) $\dfrac{1}{(X^2+4)(X+2)^2}$ (d) $\dfrac{X^4}{X^2+2X+5}$

2. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t$ (b) $J = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$

(c) $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2(t^2-2t+2)}$ (d) $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2(t+1)}$

Exercice 2 Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F' = \dfrac{1}{X}$.

Exercice 3 Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F_{m,n} = \dfrac{X^m}{(X-1)^n}$.
Indication : $X = (X-1)+1$.

Exercice 4

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Calculer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. En utilisant la question précédente, calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-\omega}$.

Exercice 5 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
2. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P'(x)^2 \geqslant P(x)P''(x),$$
avec égalité si et seulement si x est racine multiple de P.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :
$$F_n = \frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$$

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de :
$$F_n = \frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$$

Exercice 8 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme :
$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Exercice 9 Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

1. $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}$ en posant $u = \cos(t)$;
2. $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{4-\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \cos(t)$;
3. $K = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)^3}$ en posant $u = \sin(t)$.

Exercice 10 Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :
$$I_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{n+1}}$$

1. Exprimer $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire, pour tout entier naturel n, l'existence de la limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{n+1}}$ et la calculer. *Cette limite est notée* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{n+1}}$.