Fonctions de deux variables

1 Topologie

Exercice 1

1. Montrer que l'intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'une réunion finie d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Est-ce encore vrai pour une intersection quelconque d'ouverts ?

2 Limites et continuité

Exercice 2 Étudier la limite en $(0,0)$ des fonctions suivantes en suivant l'indication proposée :

1. $f:(x,y)\longmapsto \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a $|f(x,y)|\leqslant \dfrac{\|(x,y)\|}{2}$.
2. $g:(x,y)\longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{xy}-1}{x}$

   Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $|\mathrm{e}^{t}-1|\leqslant |t|(1+\mathrm{e}^{t})$.
3. $h:(x,y)\longmapsto \dfrac{xy}{x^2-y^2}$

   Poser $(x,y)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$.
4. $i:(x,y)\longmapsto \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

   Poser $(x,y)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$.

3 Dérivées partielles

Exercice 3 Une mole de gaz parfait qui occupe le volume V à la température T et à la pression P vérifie la relation $PV=RT$ où R est une constante. Montrer que :

$$\frac{\partial P}{\partial V}\times\frac{\partial V}{\partial T}\times\frac{\partial T}{\partial P}=-1 \qquad \text{et} \qquad T\frac{\partial P}{\partial T}\times\frac{\partial V}{\partial T}=R$$

Exercice 4 Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes en précisant leurs domaines d'existence :

1. $f:(x,y)\longmapsto \dfrac{x}{y}$
2. $g:(x,y)\longmapsto (x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x^2y}$
3. $h:(x,y)\longmapsto \ln(xy)$
4. $i:(x,y)\longmapsto x^y$
5. $j:(x,y)\longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)$
6. $k:(x,y)\longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{xy}}{x+y}$

Exercice 5 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

1. Pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, on pose $\varphi(t)=f\left(\mathrm{e}^{t},t+\dfrac{1}{t}\right)$. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
2. On pose ensuite $\psi(u,v)=f(u+v,uv)$ pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient.

Exercice 6

1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f\in\mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ et $A\in\Omega$. Déterminer un vecteur normal au plan tangent de f en A.
2. On considère la fonction $f:(x,y)\longmapsto \mathrm{e}^{x+y}(x-y+1)$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (a) Déterminer l'équation du plan tangent de f en $(0,0)$.
   (b) La fonction f possède-t-elle un plan tangent parallèle au plan d'équation $x=y+z$?

Exercice 7 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ une fonction telle que :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\qquad f(tx,ty)=tf(x,y)$$

1. Calculer les dérivées directionnelles de f en $(0,0)$.
2. En déduire que f est linéaire.

Exercice 8

1. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{y} & \text{si } y\neq 0\\ x & \text{si } y=0\end{cases}$$

   Montrer que f est dérivable dans toutes les directions en $(0,0)$ mais qu'elle n'y est pas continue.
2. Même question avec :

$$g:(x,y)\longmapsto\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4 Équations aux dérivées partielles

Exercice 9 On dit qu'une fonction $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est *homogène de degré* $\alpha \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y)$$

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et homogène sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que les dérivées partielles de f sont aussi homogènes.
2. Soient $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si :
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

Exercice 10 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$;

(2) $\forall x,y,t \in \mathbb{R},\ f(x+t,y+t) = f(x,y)$.

Exercice 11 En utilisant un passage en coordonnées polaires, résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes d'inconnue $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\mathbb{R})$:

1. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$
2. $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = f$

Exercice 12 Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes d'inconnues $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ en utilisant le changement de variable proposé :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = f$ en posant $(u,v) = (x+y, x-y)$, avec la condition $f(x,0) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = x+y$ en posant $(x,y) = \left(u, \dfrac{u^2}{2} + v\right)$ avec la condition $f(0,y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

5 Extrema locaux

Exercice 13 On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{y}{1+x^2+y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer le gradient de f et préciser les points critiques de cette fonction.
2. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad -\frac{1}{2} \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{1}{2}$$
3. Conclure quant à l'existence d'extrema pour la fonction f.

Exercice 14 Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f : (x,y) \longmapsto x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$
2. $f : (x,y) \longmapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
3. $f : (x,y) \longmapsto (x-y)^2 + (x+y)^3$
4. $f : (x,y) \longmapsto x^3 + y^3$

Exercice 15 On considère la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^4+y^4} \end{array} \right.$$

1. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$? Les calculer le cas échéant.
3. En déduire l'existence éventuelle d'extrema sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16 Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$g(x,y) = (x+y)\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

1. Calculer le gradient de g. Quelles sont les valeurs de (x,y) susceptibles d'être des extrema pour g ?
2. Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Quels sont les maximum $M(r)$ et minimum $m(r)$ de g sur le cercle $\mathscr{C}_r$ de centre $O(0,0)$ et de rayon r ?
3. Étudier les variations de M et de m sur $\mathbb{R}_+$.
4. En déduire que g admet un maximum et un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.