

# FAMILLES SOMMABLES

(corrigés)

**Exercice 1** On sait que si une famille  $u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$  est sommable, alors toute sous-famille  $(u_i)_{i \in J}$  (où  $J \subset I$ ) de  $u$  est sommable. Par contraposition, s'il existe une sous-famille de  $u$  qui n'est pas sommable, alors la famille  $u$  n'est pas sommable.

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . Ainsi,  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$  est une sous-famille de  $u$ . Or cette sous-famille n'est pas sommable puisque la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge. On peut donc conclure que :

la famille  $u$  n'est pas sommable

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $1 + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[$ . Donc  $\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}\right)_{n \geq 1}$  est une sous-famille de  $v$ . Cette famille positive n'est pas sommable car la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}$  est grossièrement divergente. En effet, son terme général tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . On peut donc conclure que :

la famille  $v$  n'est pas sommable

3. On considère la sous-famille positive  $(a_{p+1,p})_{p \geq 1}$  de  $w$ . On a :

$$a_{p+1,p} = \frac{1}{(p+1)^2 - p^2} = \frac{1}{2p+1} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2p}$$

La série (de Riemann)  $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p}$  est divergente donc, d'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série  $\sum_{p \geq 1} a_{p+1,p}$  est divergente. Autrement dit, la famille  $(a_{p+1,p})_{p \geq 1}$  n'est pas sommable. On conclut donc que :

la famille  $w$  n'est pas sommable

**Exercice 2** La famille  $u = (a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$  est à valeurs positives. Pour tout  $d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , on pose :

$$I_d = \{(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid m + n = d\}$$

de sorte que :

$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigsqcup_{d=2}^{+\infty} I_d$$

D'après le théorème de sommation par paquets positif, on a (le calcul ayant lieu dans  $[0, +\infty]$ ) :

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} a_{m,n} &= \sum_{d=2}^{+\infty} \sum_{(m,n) \in I_d} a_{m,n} = \sum_{d=2}^{+\infty} \sum_{(m,n) \in I_d} \frac{1}{d^\alpha} \\ &= \sum_{d=2}^{+\infty} \frac{1}{d^\alpha} \sum_{(m,n) \in I_d} 1 \end{aligned}$$

Pour tout  $d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , on a :

$$I_d = \{(k, d-k) \mid k \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket\} \quad \text{donc} \quad \sum_{(m,n) \in I_d} 1 = |I_d| = d-1$$

Par conséquent :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} a_{m,n} = \sum_{d=2}^{+\infty} \frac{d-1}{d^\alpha}$$

Or  $\frac{d-1}{d^\alpha} \underset{d \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{d^{\alpha-1}}$  et on sait que la série de Riemann  $\sum_{d \geq 2} \frac{1}{d^{\alpha-1}}$  est convergente si et seulement si  $\alpha - 1 > 1$ , *i.e.* si et seulement si  $\alpha > 2$ . Par comparaison de séries à termes positifs, la série  $\sum_{d \geq 2} \frac{d-1}{d^\alpha}$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 2$ . Autrement dit :

la famille  $u$  est sommable si et seulement si  $\alpha > 2$

De plus, si  $\alpha > 2$ , on peut écrire que (les séries de Riemann mises en jeu étant convergentes) :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} a_{m,n} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{d-1}{d^\alpha} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^{\alpha-1}} - \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^\alpha} = \zeta(\alpha-1) - \zeta(\alpha)$$

**Exercice 3** Par définition de la sommabilité d'une famille de nombres complexes, on doit montrer que la famille  $(|u_{n,p}|)_{(n,p) \in I}$ , à valeurs positifs, est sommable.

★ D'après le théorème de Fubini positif, on a (le calcul ayant lieu dans  $[0, +\infty]$ ) :

$$\sum_{(n,p) \in I} |u_{n,p}| = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{p}{n(n+1)} a_p = \sum_{p=1}^{+\infty} p a_p \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Or, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=p}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{N+1} \right) \quad (\text{somme télescopique}) \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{(n,p) \in I} |u_{n,p}| = \sum_{p=1}^{+\infty} |a_p| < +\infty$$

car la série  $\sum_{p \geq 1} a_p$  est absolument convergente. Ainsi :

la famille  $(u_{n,p})_{(n,p) \in I}$  est sommable

★ On calcule la somme de cette famille en utilisant le théorème de Fubini général (qui s'applique puisque la famille est sommable). Les calculs sont analogues à ceux précédemment menés :

$$\sum_{(n,p) \in I} u_{n,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} p a_p \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

d'où l'on tire que :

$$\sum_{(n,p) \in I} u_{n,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p$$

**Exercice 4** La famille  $u = \left( \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$  est à valeurs positives. On peut appliquer le théorème de Fubini positif (le calcul ayant lieu dans  $[0, +\infty]$ ) :

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} &= \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \\ &= \sum_{q=1}^{+\infty} \lim_{P \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^P \left( \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1} \right) \\ &= \sum_{q=1}^{+\infty} \lim_{P \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{q^2} - \frac{1}{P+q^2+1} \right) \quad (\text{somme télescopique}) \\ &= \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} \end{aligned}$$

Or on sait que la série de Riemann  $\sum_{q \geq 1} \frac{1}{q^2}$  est convergente (car  $2 > 1$ ) donc :

la famille (positive)  $u$  est sommable et  $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{\pi^2}{6}$

**Exercice 5**

★ La famille  $\left( \frac{1}{k!} \right)_{\substack{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \\ n \leq k}}$  est à valeurs positives donc la somme de cette famille est bien définie en tant qu'élément de  $[0, +\infty]$ . De plus, d'après le théorème de Fubini

positif, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^k \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k 1 \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \quad (\text{linéarité positive}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + e \\ &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} + e \quad (\text{changement d'indice } \ell = k - 1) \\ &= 2e \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2e$$

**Remarque :** la valeur de la somme obtenue montre donc que la famille  $\left(\frac{1}{k!}\right)_{\substack{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \\ n \leq k}}$  est sommable.

★ De même, comme la famille  $\left(\frac{1}{p^q}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^2}$  est à valeurs positives, sa somme est bien définie en tant qu'élément de  $[0, +\infty]$ . De plus, d'après le théorème de Fubini positif, on a :

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^2} \frac{1}{p^q} = \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{q=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^q$$

Pour tout  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , on a  $0 < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$  donc  $\frac{1}{p} \in ]-1, 1[$ ; la série géométrique de raison  $\frac{1}{p}$  est donc convergente. Ainsi, en effectuant le changement d'indice  $\ell = q - 2$  dans la somme intérieure, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^2} \frac{1}{p^q} &= \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^\ell = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \\ &= \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} \end{aligned}$$

Or, pour tout  $P \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , on a :

$$\sum_{p=2}^P \frac{1}{p(p-1)} = \sum_{p=2}^P \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) = 1 - \frac{1}{P} \quad (\text{somme télescopique})$$

Ainsi :

$$\sum_{p=2}^P \frac{1}{p(p-1)} \xrightarrow{P \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et donc} \quad \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} = 1$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^2} \frac{1}{p^q} = 1}$$

**Remarque :** la famille  $\left(\frac{1}{p^q}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^2}$  est donc sommable.

**Exercice 6** Par définition de la sommabilité d'une famille de nombres réels, il s'agit de montrer que la famille à valeurs positives :

$$\left(\left|\frac{(-1)^n}{nk(k+1)}\right|\right)_{\substack{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ n \leq k}} = \left(\frac{1}{nk(k+1)}\right)_{\substack{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ n \leq k}}$$

est sommable. D'après le théorème de Fubini positif, on a (le calcul ayant lieu dans  $[0, +\infty]$ ) :

$$\sum_{\substack{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ n \leq k}} \frac{1}{nk(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^K \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{K+1}\right) \quad (\text{somme télescopique}) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{\substack{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ n \leq k}} \frac{1}{nk(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

car on sait que la série (de Riemann)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente (puisque  $2 > 1$ ). Par conséquent :

la famille  $u$  est sommable

Calculons maintenant la somme de cette famille en utilisant le théorème de Fubini général (qui s'applique par sommabilité de la famille) :

$$\sum_{\substack{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ n \leq k}} \frac{(-1)^n}{nk(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}}_{=\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Or la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$  est absolument convergente donc, pour calculer sa somme, on peut réarranger ses termes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Or,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{3\pi^2}{24}$$

Finalement :

$$\sum_{\substack{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ n \leq k}} \frac{(-1)^n}{nk(k+1)} = -\frac{\pi^2}{12}$$

### Exercice 7

- Soit  $\alpha > 1$ . La série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  est convergente donc la suite de ses restes est bien définie.

- ★ Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k$  un entier supérieur ou égal à  $n$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  (car  $\alpha > 0$ ) donc en particulier  $[k, k+1]$ . Ainsi :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} dt,$$

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \stackrel{(*)}{\leq} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \stackrel{(**)}{\leq} \frac{1}{k^\alpha}$$

- ★ Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N \geq n+1$ . En sommant les inégalité  $(**)$  sur les entiers  $k \in \llbracket n+1, N \rrbracket$ , on obtient (en utilisant la relation de Chasles pour les intégrales) :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha}$$

et, en sommant les inégalités  $(*)$  sur les entiers  $k \in \llbracket n, N-1 \rrbracket$ , on a :

$$\sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_n^N \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{i.e.} \quad \sum_{\ell=n+1}^N \frac{1}{\ell^\alpha} \leq \int_n^N \frac{1}{t^\alpha} dt$$

en effectuant le changement d'indice  $\ell = k+1$  dans la somme.

- ★ Soit  $N \in \mathbb{N} \setminus \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a montré que :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{1}{t^\alpha} dt \quad (\diamond)$$

Or (comme  $\alpha \neq 1$ ) :

$$\int_n^N \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[ \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_n^N = \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right)$$

De la même manière :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \right)$$

Comme  $\alpha > 1$ , on a  $N^{\alpha-1} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} +\infty$  donc :

$$\int_n^N \frac{1}{t^\alpha} dt \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \quad \text{et} \quad \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}$$

En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$  dans  $(\diamond)$  (ce qui est licite car chaque membre de l'inégalité est le terme général d'une série convergente), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^\alpha}$$

Comme  $n+1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$  donc :

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Le théorème des gendarmes (version équivalents) et les dernières inégalités obtenues permettent de conclure que :

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

★ Soit  $\alpha \in ]-\infty, 1]$ . La série de Riemann  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$  est divergente donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$$

$$\text{puis } \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty.$$

★ Soit maintenant  $\alpha \in ]1, +\infty[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n(\alpha) = \sum_{k=n+1} \frac{1}{k^\alpha}$ .

D'après la question 1., on a  $u_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ . Or la série de Riemann

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$  est convergente si et seulement si  $\alpha-1 > 1$ , *i.e.* si et seulement si

$\alpha > 2$ . Ainsi, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 2$ .

Par comparaison de séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} u_n(\alpha)$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 2$ .

Finalement :

$$\text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ la série } \sum_{n \geq 0} u_n(\alpha) \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2$$

3. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La famille  $\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)_{\substack{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \\ k > n}}$  est à valeurs positives donc, d'après le théorème de Fubini positif on a (le calcul ayant lieu dans  $[0, +\infty]$ ) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

Or la série de Riemann  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 2$  donc :

$$\text{la famille } \left(\frac{1}{k^\alpha}\right)_{\substack{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \\ k > n}} \text{ est sommable si et seulement si } \alpha > 2$$

## Exercice 8

1. Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Il s'agit de montrer que la famille à valeurs positives  $(|x^{k\ell}|)_{(k,\ell) \in (\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)}$  est sommable. D'après le théorème de Fubini positif, on a (le calcul ayant lieu dans  $[0, +\infty]$ ) :

$$\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} |x^{k\ell}| = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} |x|^{k\ell} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} (|x|^k)^\ell$$

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $x \in ]-1, 1[$ , on a  $|x|^k \in [0, 1[$ . La série géométrique de raison  $|x|^k$  est donc convergente et (en utilisant le changement d'indice  $j = \ell - 1$ ), on a :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} (|x|^k)^\ell = |x|^k \sum_{j=0}^{+\infty} (|x|^k)^j = \frac{|x|^k}{1 - |x|^k}$$

On a  $|x|^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$  (car  $x \in ]-1, 1[$ ) donc  $\frac{|x|^k}{1 - |x|^k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} |x|^k$ . On sait que la série géométrique de raison  $|x|$  converge donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{|x|^k}{1 - |x|^k}$  est convergente, ce qui prouve la sommabilité de la famille  $(|x^{k\ell}|)_{(k,\ell) \in (\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)}$ . Finalement :

$$\text{la famille } (x^{k\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \text{ est sommable}$$

2. Il s'agit de calculer la somme de la famille (sommable)  $(x^{k\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$  de deux manières différentes.

★ On a montré précédemment que  $\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} x^{k\ell} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k}$  (il s'agit du même calcul que celui mené à la question précédente, en omettant cette fois les valeurs absolues).

★ Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons :

$$I_n = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid k\ell = n\}$$

On a l'égalité :

$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} I_n$$

Comme la famille  $(x^{k\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$  est sommable, on a d'après le théorème de sommation par paquets général :

$$\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} x^{k\ell} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,\ell) \in I_n} x^{k\ell} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sum_{(k,\ell) \in I_n} 1$$

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a en notant  $\mathcal{D}(n)$  l'ensemble des diviseurs positifs de  $n$  :

$$I_n = \left\{ \left( k, \frac{n}{k} \right) \mid k \in \mathcal{D}(n) \right\} \quad \text{donc} \quad \sum_{(k,\ell) \in I_n} 1 = |I_n| = |\mathcal{D}(n)| = d(n)$$

Ainsi :

$$\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} x^{k\ell} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n}$$

### Exercice 9

1. Soient  $a, b \in \mathbb{C}$  tels que  $|a| < 1$  et  $|b| < 1$ . Les séries géométriques de raison  $a$  et  $b$  sont convergentes donc :

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-b} = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n$$

Les séries  $\sum_{n \geq 0} a^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b^n$  sont absolument convergentes (car les séries géométriques de raisons  $|a|, |b| \in [0, 1[$  convergent) donc, d'après le théorème sur le produit de Cauchy, si on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k},$$

la série  $\sum_{n \geq 0} w_n$  converge absolument et on a l'égalité :

$$\frac{1}{1-a} \times \frac{1}{1-b} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on sait que :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{(n+1)-1} a^k b^{(n+1)-1-k} = (a-b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

donc, si on suppose que  $a \neq b$ , il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{(1-a)(1-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}}$$

2. Le raisonnement est le même qu'à la question précédente. La seule différence se trouve dans le calcul de  $w_n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^n a^k a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^n 1 = (n+1)a^n$$

Donc :

$$\boxed{\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n}$$

### Exercice 10

1. La série exponentielle  $\sum_{k \geq 0} \frac{4^k}{k!}$  est convergente de somme égale à  $e^4$  donc :

$$w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{-n} e^4 = e^4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

La série géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  est convergente car  $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$ . Par comparaison de séries à termes positifs, on peut conclure que :

la série  $\sum_{n \geq 0} w_n$  est convergente

2. On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

Comme les séries  $\sum_{k \geq 0} \frac{2^k}{k!}$  (série exponentielle à termes positifs) et  $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^k$  (série géométrique à termes positifs) sont absolument convergentes, on a l'égalité suivante d'après le théorème sur le produit de Cauchy :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = e^2 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

Ainsi :

$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = 2e^2$