Familles sommables

Pour les exercices 4 et 6, on admettra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

1 Études de sommabilité, calculs de sommes

Exercice 1 Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables :

1. $u=(x)_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}$;
2. $v=\left(\dfrac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$;
3. $w=(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ où $a_{n,p}=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2-p^2} & \text{si } n\neq p\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Exercice 2 Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour tous $m,n\in\mathbb{N}^*$, on pose $a_{m,n}=\dfrac{1}{(m+n)^\alpha}$. Étudier la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3 Soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}a_p$ soit absolument convergente. On pose $I=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ et :

$$\forall(n,p)\in I,\qquad u_{n,p}=\begin{cases}\dfrac{p}{n(n+1)}a_p & \text{si } p\leqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Démontrer que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 4 Démontrer l'existence et calculer la somme $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Exercice 5 Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k\,!}$ et $\displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})^2}\frac{1}{p^q}$.

Exercice 6 Étudier la sommabilité de la famille $u=\left(\dfrac{(-1)^n}{nk(k+1)}\right)_{\substack{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ n\leqslant k}}$ est sommable et calculer sa somme le cas échéant.

Exercice 7

1. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ quand n tend vers $+\infty$, pour tout $\alpha>1$.
2. En déduire les valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ pour lesquelles $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ converge.
3. Retrouver ce résultat d'une autre façon, en démontrer que pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

Exercice 8 Soit $x\in]-1,1[$.

1. Montrer que la famille $\left(x^{k\ell}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable.
2. En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)x^n,$$
où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de n.

2 Produit de Cauchy

Exercice 9 Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tels que $|a|<1$ et $|b|<1$. Montrer que :

1. si $a\neq b$, alors $\displaystyle\frac{1}{(1-a)(1-b)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$;
2. si $a=b$, alors $\displaystyle\frac{1}{(1-a)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n$.

Exercice 10 Pour tout entier naturel n, on pose $w_n=2^{-n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k\,!}$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}w_n$ converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.