

# ESPACES VECTORIELS (GÉNÉRALITÉS)

(corrigés)

## Exercice 1

1. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} u_a \in \text{Vect}(v, w_a) &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, u_a = \lambda v + \mu w_a \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (1, -a, 1) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(a, 0, 2) \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda + 2\mu = 1 & \text{L}_1 \\ \lambda = -a & \text{L}_2 \\ \lambda + a\mu = 1 & \text{L}_3 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda + a\mu = 1 & \text{L}_1 \\ -2\mu = -a - 1 & \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 - \text{L}_1 \\ (a-2)\mu = 0 & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 - \text{L}_1 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda + a\mu = 1 & \text{L}_1 \\ -2\mu = -a - 1 & \text{L}_2 \\ 0 = (a-2)(-a-1) & \end{cases} \end{aligned}$$

en effectuant l'opération  $\text{L}_3 \leftarrow 2\text{L}_3 + (a-2)\text{L}_2$  pour la dernière ligne. Le système obtenu étant échelonné, il est compatible si et seulement si son équation de compatibilité (à savoir  $(a-2)(-a-1) = 0$ ) est satisfaite. Autrement dit :

$$u_a \in \text{Vect}(v, w_a) \iff (a-2)(-a-1) = 0$$

Finalement :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, u_a \in \text{Vect}(v, w_a) \iff a \in \{-1, 2\}}$$

2. On note :

$$f : x \mapsto \cos(x)^2, \quad g : x \mapsto 1 \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \cos(2x)$$

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1 \quad \text{donc} \quad \cos(x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$$

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{g(x)}{2} + \frac{h(x)}{2},$$

ce qui se réécrit  $f = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}h$ . Ainsi :

la fonction  $f$  est combinaison linéaire de  $g$  et  $h$

3. On note  $s : x \mapsto \sin(2x)$ . Montrons que  $s \notin \text{Vect}(\sin, \cos)$  en raisonnant par l'absurde. Supposons que  $s \in \text{Vect}(\sin, \cos)$ . Il existe alors  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $s = \lambda \sin + \mu \cos$ . Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad s(x) = \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) \quad \text{i.e.} \quad \sin(2x) = \lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$$

★ Le choix  $x = 0 \in \mathbb{R}$  fournit l'égalité  $0 = \lambda \times 0 + \mu \times 1$  donc  $\mu = 0$ . Il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(2x) = \lambda \sin(x)$$

★ Le choix  $\lambda = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$  fournit l'égalité  $0 = \sin(\pi) = \lambda \times 1$  donc  $\lambda = 0$ . Il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(2x) = 0$$

★ Le choix  $x = \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$  nous donne  $1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , ce qui est absurde.

Finalement :

$$\boxed{s \notin \text{Vect}(\sin, \cos)}$$

4. Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . Il existe  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$  tels que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On a :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} \\ &= (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (bc - ad) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(a+d)}_{\in \mathbb{K}} A + \underbrace{(bc - ad)}_{\in \mathbb{K}} I_2 \end{aligned}$$

Ainsi,  $A^2 \in \text{Vect}(I_2, A)$ . Finalement :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \quad A^2 \in \text{Vect}(I_2, A)}$$

**Exercice 2** On sait que si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et si  $F \in \mathcal{P}(E)$ , alors  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel si et seulement si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Dans chacune des questions, on étudie donc la structure de sous-espace vectoriel de l'ensemble donné dans l'espace vectoriel qui contient l'ensemble.

1. On a  $(1, 1) \in A$  (car  $1 \in \mathbb{R}_+$  et  $1 = 1$ ) mais  $-(1, 1) \notin A$  car  $-1 \notin \mathbb{R}_+$ . Ainsi,  $A$  n'est pas stable pour la multiplication par les scalaires donc :

$A$  n'est pas un espace vectoriel

2. On remarque que  $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \notin A$  car  $2 \times 0 - 5 \times 0 - 1 = -1 \neq 0$  donc  $B$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi :

$B$  n'est pas un espace vectoriel

3. On a :

$$C = \{x(1, 2, 3) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 2, 3))$$

donc  $C$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Ainsi :

$C$  est un espace vectoriel

4. On a  $u = (-1, \sqrt{2}) \in D$  car  $(-1)^3 - 1 + (\sqrt{2})^2 = 0$  mais  $2u \notin D$  car  $2u = (-2, 2\sqrt{2})$  et :

$$(-2)^3 - 2 + (2\sqrt{2})^2 = -10 + 8 = -2 \neq 0$$

Donc :

$D$  n'est pas un espace vectoriel

5. Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On a :

$$(x, y, z) \in E \iff x = y \text{ et } 3y - 2z = 0$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ y = \frac{2}{3}z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = \frac{2}{3}z \end{cases}$$

$$\iff (x, y, z) = \left(z, \frac{2}{3}z, z\right)$$

Ainsi :

$$E = \left\{z \left(1, \frac{2}{3}, 1\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(\left(1, \frac{2}{3}, 1\right)\right)$$

donc  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Finalement :

$E$  est un espace vectoriel

6. On a  $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$  donc  $0_{\mathbb{K}[X]} \notin F$ . Ainsi,  $F$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ . On en déduit que :

$F$  n'est pas un espace vectoriel

7. On a  $G \subset \mathbb{R}[X]$ . Montrons que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ .

★ On a  $0_{\mathbb{R}[X]}$  car :

$$0_{\mathbb{R}[X]}(X^2) = 0_{\mathbb{R}[X]}, \quad 0'_{\mathbb{R}[X]} = 0_{\mathbb{R}[X]} \quad \text{et} \quad X^4 0_{\mathbb{R}[X]} = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

★ Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $P, Q \in G$ . Montrons que  $P + \lambda Q \in G$ . On a :

$$\begin{aligned} (P + \lambda Q)(X^2) &= P(X^2) + \lambda Q(X^2) \\ &= P'(X) + X^4 P(X) + \lambda(Q'(X) + X^4 Q(X)) \quad (\text{car } P, Q \in G) \\ &= P'(X) + \lambda Q'(X) + X^4 P(X) + \lambda X^4 Q(X) \\ &= (P + \lambda Q)'(X) + X^4 (P + \lambda Q)(X) \end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation. Ainsi,  $P + \lambda Q \in G$ .

On peut donc conclure que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ . Finalement :

$G$  est un espace vectoriel

8. On a  $H \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Montrons que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

★ On a :

$$0_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(0) = 0_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(1) = 0 \quad \text{et} \quad 0'_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(0) = 0_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(0) = 0$$

donc  $0_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(0) + 0_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(1) = 0'_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(0)$ . Ainsi,  $0_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in H$ .

★ Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in H$ . Montrons que  $f + \lambda g \in H$ . On a :

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(0) + (f + \lambda g)(1) &= f(0) + \lambda g(0) + f(1) + \lambda g(1) \\ &= (f(0) + f(1)) + \lambda(g(0) + g(1)) \\ &= f'(0) + \lambda g'(0) \quad (\text{car } f, g \in H) \\ &= (f + \lambda g)'(0) \end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation. Ainsi,  $f + \lambda g \in H$ .

Ainsi,  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Finalement :

$H$  est un espace vectoriel

### Exercice 3

1. Montrons que  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

★ La fonction nulle  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$  est 1-périodique sur  $\mathbb{R}$  car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x) = 0 \quad \text{et} \quad 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x+1) = 0 = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x)$$

donc  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in A$ .

★ Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in A$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(x+1) &= f(x+1) + \lambda g(x+1) \\ &= f(x) + \lambda g(x) \quad (\text{car } f, g \in A) \\ &= (f + \lambda g)(x) \end{aligned}$$

La fonction  $f + \lambda g$  est donc 1-périodique sur  $\mathbb{R}$ , *i.e.*  $f + \lambda g \in A$ .

Ainsi :

$A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

2. La fonction  $f : x \mapsto x$  appartient à  $B$  (puisque  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ ) mais  $-f$  n'appartient pas à  $B$ . En effet, on a  $1 \leq 2$  et :

$$(-f)(1) = -1 > -2 = (-f)(2)$$

Ainsi,  $B$  n'est pas stable par la multiplication par les scalaires donc :

$B$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

3. Considérons les fonctions  $f : x \mapsto e^x$  et  $g : x \mapsto -x$ . La fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  tandis que  $g$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Ces fonctions sont donc monotones sur  $\mathbb{R}$  donc  $f, g \in C$ . Montrons que  $f - g \notin C$ . Posons  $h = f - g$ .

★ On a  $0 \leq 1$  et  $h(0) = 1$  et  $h(1) = e - 1 > h(0)$  (car  $e \in ]2, 3]$ ) donc la fonction  $h$  n'est pas décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

★ On a  $-1 \leq 0$  et  $h(-1) = e^{-1} + 1 > h(0)$  donc la fonction  $h$  n'est pas croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi, la fonction  $h$  n'est pas monotone sur  $\mathbb{R}$ , *i.e.*  $h \notin C$ . On en déduit que  $C$  n'est pas stable par combinaisons linéaires. Finalement :

$C$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

4. Montrons que  $D$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

★ On a l'égalité  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} + 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$  et la fonction nulle étant constante sur  $\mathbb{R}$ , elle est à la fois croissante et décroissante sur  $\mathbb{R}$ . L'égalité précédente nous donne l'appartenance  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in D$ .

★ Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in D$ . Montrons que  $f + \lambda g \in D$ . Par hypothèse, il existe des fonctions  $f_-, g_-, f_+, g_+ \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  telles que  $f = f_- + f_+$ ,  $g = g_- + g_+$ , les fonctions  $f_-$  et  $g_-$  étant décroissantes sur  $\mathbb{R}$  tandis que les fonctions  $f_+$  et  $g_+$  sont croissantes sur  $\mathbb{R}$ . On distingue ensuite deux cas.

— **Premier cas** :  $\lambda \in \mathbb{R}_+$

On a :

$$f + \lambda g = (f_- + f_+) + \lambda(g_- + g_+) = (f_- + \lambda g_-) + (f_+ + \lambda g_+)$$

Comme  $\lambda \geq 0$ , la fonction  $f_- + \lambda g_-$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$  (car  $f_-$  et  $g_-$  le sont). De la même manière, la fonction  $f_+ + \lambda g_+$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi,  $f + \lambda g \in D$ .

— **Deuxième cas** :  $\lambda \in \mathbb{R}^*$

On écrit cette fois :

$$f + \lambda g = (f_- + \lambda g_+) + (f_+ + \lambda g_-)$$

La fonction  $g_+$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $\lambda \leq 0$  donc  $\lambda g_+$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi, la fonction  $f_- + \lambda g_+$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ . De la même, la fonction  $f_+ + \lambda g_-$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ . On a donc  $f + \lambda g \in D$ .

Dans tous les cas,  $f + \lambda g \in D$ .

Finalement :

$D$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

5. Montrons que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . La fonction  $f : x \mapsto -e^x$  est majorée par 0 sur  $\mathbb{R}$  (en effet, cette fonction est à valeurs négatives sur  $\mathbb{R}$ ) mais la fonction  $-f : x \mapsto e^x$  n'est pas majorée sur  $\mathbb{R}$  car  $e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Donc  $E$  n'est pas stable par la multiplication par les scalaires. On en déduit que :

$F$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

6. Montrons que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

★ Toute fonction constante sur  $\mathbb{R}$  étant bornée sur  $\mathbb{R}$ , on a bien  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in F$ .

★ Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in F$ . Montrons que  $f + \lambda g \in F$ . Par hypothèse sur  $f$  et  $g$ , il existe  $M, N \in \mathbb{R}_+$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq M \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq N$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} |(f + \lambda g)(x)| &= |f(x) + \lambda g(x)| \\ &\leq |f(x)| + |\lambda| \times |g(x)| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq M + |\lambda| \times N \quad (\text{car } |\lambda| \in \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |(f + \lambda g)(x)| \leq M + |\lambda| \times N \quad \text{et} \quad M + |\lambda| \times N \in \mathbb{R}_+$$

donc la fonction  $f + \lambda g$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , i.e.  $f + \lambda g \in F$ .

Finalement :

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

### Exercice 4

1. Montrons que  $E_1$  est un sous-espace vectoriel de  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

★ La suite nulle  $0_E$  est la suite constante égale à 0 ; elle est donc convergente de limite 0. Ainsi,  $0_E \in E_1$ .

★ On sait que toute combinaison linéaire de suites convergentes est une suite convergente donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E_1, \quad u + \lambda v \in E_1$$

Ainsi :

$E_1$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

2. La suite nulle  $0_E$  est convergente donc elle n'est pas divergente. Autrement dit,  $0_E \notin E_2$ . Ainsi :

$E_2$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$

3. La suite nulle  $0_E$  est une suite constante et toute combinaison linéaire de suites constantes est une suite constante donc :

$E_3$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

4. Montrons que  $E_4$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

★ La suite nulle  $0_E$  est constante donc elle est bornée. Autrement dit,  $0_E \in E_4$ .

★ Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u, v \in E_4$ . Il existe  $M, N \in \mathbb{R}_+$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M \quad \text{et} \quad |v_n| \leq N$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} |(u + \lambda v)_n| &= |u_n + \lambda v_n| \\ &\leq |u_n| + |\lambda| \times |v_n| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \underbrace{M + |\lambda| \times N}_{\in \mathbb{R}_+} \quad (\text{valable car } |\lambda| \geq 0) \end{aligned}$$

La suite  $u + \lambda v$  est bornée donc  $u + \lambda v \in E_4$ .

Ainsi :

$E_4$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

5. Montrons que  $E_5$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

★ La suite nulle  $0_E$  est constante égale à 0 donc elle est convergente de limite 0. Autrement dit,  $0_E \in E_5$ .

★ Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u, v \in E_5$ . Comme  $u$  et  $v$  convergent, la suite  $u + \lambda v$  converge de limite (par linéarité de la limite) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + \lambda v_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \\ &= 0 + \lambda \times 0 \quad (\text{car } u, v \in E_5) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $u + \lambda v \in E_5$ .

Finalement :

$E_5$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

6. Montrons que  $E_6$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

★ Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $0 = |0| \leq n^2$  donc  $0_E \in E_6$ .

★ Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u, v \in E_6$ . Par hypothèse, il existe  $C, D \in \mathbb{R}_+$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{u_n}{n^2} \right| \leq C \quad \text{et} \quad \left| \frac{v_n}{n^2} \right| \leq D$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_n + \lambda v_n}{n^2} \right| &\leq \frac{|u_n| + |\lambda| \times |v_n|}{n^2} \\ &= \left| \frac{u_n}{n^2} \right| + |\lambda| \times \left| \frac{v_n}{n^2} \right| \\ &\leq \underbrace{C + |\lambda|D}_{\in \mathbb{R}_+} \quad (\text{valable car } |\lambda| \geq 0) \end{aligned}$$

Ainsi,  $u + \lambda v \in E_6$ .

Finalement :

$E_6$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

**Exercice 5** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F, G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . On raisonne par double implication.

★ On suppose que  $F \subset G$  ou que  $G \subset F$ . Montrons que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Comme  $F$  et  $G$  jouent des rôles symétriques, on peut supposer, sans perte de généralité, que  $F \subset G$ . On a alors  $F \cup G = G$  et donc  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  (par hypothèse sur  $G$ ).

★ On suppose que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrons que  $F \subset G$  ou que  $G \subset F$ . Par l'absurde, supposons que  $F \not\subset G$  et que  $G \not\subset F$ . On a donc  $G \setminus F \neq \emptyset$  et  $F \setminus G \neq \emptyset$ . Il existe des éléments  $f_0 \in F$  et  $g_0 \in G$  tels que  $f_0 \notin G$  et  $g_0 \notin F$ . On a  $f_0 \in F$  et  $g_0 \in G$  et  $F$  et  $G$  sont des sous-ensembles de  $F \cup G$  sont  $f_0, g_0 \in F \cup G$ . Comme  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on en déduit que  $f_0 + g_0 \in F \cup G$ . Or :

$$f_0 + g_0 \in F \cup G \iff (f_0 + g_0 \in F \text{ ou } f_0 + g_0 \in G)$$

On distingue deux cas.

— Supposons que  $f_0 + g_0 \in F$ . On sait que  $f_0 \in F$  et que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  donc  $-f_0 \in F$ . Comme  $F$  est stable pour l'addition, on a :

$$g_0 = (f_0 + g_0) + (-f_0) \in F,$$

ce qui est absurde par définition de  $g_0$ .

— Supposons que  $f_0 + g_0 \in G$ . Par la même raisonnement, on a  $-g_0 \in G$  et :

$$f_0 = (f_0 + g_0) + (-g_0) \in G,$$

ce qui est absurde par définition de  $f_0$ .

On obtient donc une absurdité dans tous les cas. On en déduit qu'on a nécessairement  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

Finalement :

$$\boxed{F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{ si et seulement si } F \subset G \text{ ou } G \subset F}$$

## Exercice 6

1. Montrons que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

★ Il est clair que  $F \subset E = \mathbb{R}^3$ . De plus :

$$F = \{ \lambda(1, 2, 1) + \mu(-3, 3, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}((1, 2, 1), (-3, 3, 0))$$

Cette écriture montre que :

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$$

★ On a également  $G \subset E$ . De plus, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in G &\iff x + 2y = 0 \iff x = -2y \\ &\iff (x, y, z) = (-2y, y, z) \\ &\iff (x, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(0, 0, 1) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$G = \{ y(-2, 1, 0) + z(0, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}((-2, 1, 0), (0, 0, 1))$$

Ainsi :

$$\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$$

2. Soit  $(x, y, z) \in E$ . On a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F \cap G &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} (x, y, z) = (\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \\ x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} (x, y, z) = (\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \\ (\lambda - 3\mu) + 2(2\lambda + 3\mu) = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} (x, y, z) = (\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \\ \lambda = -\frac{3}{5}\mu \end{cases} \\ &\iff \exists \mu \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \left( -\frac{18}{5}\mu, \frac{9}{5}\mu, -\frac{3}{5}\mu \right) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$F \cap G = \left\{ \mu \left( -\frac{18}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{3}{5} \right) \mid \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

i.e. :

$$\boxed{F \cap G = \text{Vect} \left( \left( -\frac{18}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{3}{5} \right) \right)}$$

Le vecteur non nul  $\left( -\frac{18}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{3}{5} \right)$  appartient à  $F \cap G$  donc  $F \cap G \neq \{0_E\}$ . On en déduit que :

$$\boxed{\text{les sous-espaces vectoriels } F \text{ et } G \text{ ne sont pas en somme directe}}$$

**Exercice 7** Montrons que la famille  $\mathcal{F}$  est libre. Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ . On a :

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w = 0_E &\iff \alpha(x+y) + \beta(y+z) + \gamma(x+z) = 0_E \\ &\iff \alpha x + \alpha y + \beta y + \beta z + \gamma x + \gamma z = 0_E \\ &\iff (\alpha + \gamma)x + (\alpha + \beta)y + (\beta + \gamma)z = 0_E \\ &\iff \begin{cases} \alpha & + & \gamma & = & 0 & L_1 \\ \alpha & + & \beta & & = & 0 & L_2 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 0 & L_3 \end{cases} \end{aligned}$$

car la famille  $\mathcal{L} = (x, y, z)$  est libre. Résolvons le dernier système noté  $(\mathcal{S})$ . On a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}) &\iff \begin{cases} \alpha & + & \gamma & = & 0 & L_1 \\ & \beta & - & \gamma & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & \beta & + & \gamma & = & 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha & + & \gamma & = & 0 & L_1 \\ & \beta & - & \gamma & = & 0 & L_2 \\ & & 2\gamma & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \\ &\iff \gamma = \beta = \alpha = 0 \end{aligned}$$

On peut donc conclure que :

la famille  $\mathcal{F} = (u, v, w)$  est libre

**Exercice 8**

- Soient  $r, s \in \mathbb{R}$  tels que  $r \neq s$ . Montrons que la famille  $(f_r, f_s)$  est libre. Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda f_r + \mu f_s = 0_E$ . Montrons que  $\lambda = \mu = 0$ . Par hypothèse, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda f_r(x) + \mu f_s(x) = 0_E(x) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \lambda|x-r| + \mu|x-s| = 0$$

Le choix  $x = r \in \mathbb{R}$  fournit l'égalité  $\mu|r-s| = 0$ . Or  $r \neq s$  donc  $|r-s| \neq 0$ . Par conséquent,  $\mu = 0$ . Il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda|x-r| = 0$$

Le choix  $x = s \in \mathbb{R}$  nous donne  $\lambda|s-r| = 0$  puis  $\lambda = 0$  (comme au point précédent). Ainsi :

la famille  $(f_r, f_s)$  est libre

- On doit montrer que :

$$\forall (\lambda_r)_{r \in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{R})}, \quad \sum_{r \in \mathbb{R}} \lambda_r f_r = 0_E \implies (\forall r \in \mathbb{R}, \lambda_r = 0)$$

Ceci revient à montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tous  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$  tels que  $r_1 < \dots < r_n$ , on a la propriété suivante : i.e. que :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k f_{r_k} = 0_E \implies (\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = 0)$$

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$  tels que  $r_1 < \dots < r_n$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_{r_k} = 0_E$ . On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^n f_{r_k}(x) = 0$$

Supposons que la famille  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  ne soit pas nulle. Il existe donc  $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\lambda_\ell \neq 0$ . On a l'égalité :

$$f_{r_\ell} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_\ell} f_{r_k}$$

Or, pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , le domaine de dérivabilité de la fonction  $f_r : x \mapsto |x-r|$  est  $\mathbb{R} \setminus \{r\}$ . Comme les nombres  $r_1, \dots, r_n$  sont deux à deux distincts, la fonction  $-\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_\ell} f_{r_k}$  est dérivable en  $r_\ell$ , ce qui contredit l'égalité précédente (puisque la fonction  $f_{r_\ell}$  n'est pas dérivable en  $r_\ell$ ). Finalement :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_k = 0$$

Ainsi :

la famille  $\mathcal{F} = (f_r)_{r \in \mathbb{R}}$  est libre

**Exercice 9**

- Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda \neq \mu$ . On note :

$$e_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x} \quad \text{et} \quad e_\mu : x \mapsto e^{\mu x}$$

Montrons que la famille  $(e_\lambda, e_\mu)$  est libre. Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $\alpha e_\lambda + \beta e_\mu = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ . On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha e_\lambda(x) + \beta e_\mu(x) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x) \quad \text{i.e.} \quad \alpha e^{\lambda x} + \beta e^{\mu x} = 0 \quad (1)$$

En évaluant en  $x = 0 \in \mathbb{R}$ , on obtient  $\alpha + \beta = 0$ . De plus, les fonctions  $e_\lambda$  et  $e_\mu$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc, en dérivant (1), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \lambda e^{\lambda x} + \beta \mu e^{\mu x} = 0$$

En évaluant en  $x = 0 \in \mathbb{R}$ , on a  $\alpha\lambda + \beta\mu = 0$ . On résout le système formé par les deux dernières équations obtenues :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 & L_1 \\ \alpha\lambda + \beta\mu = 0 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 & L_1 \\ \beta(\mu - \lambda) = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1 \end{cases} \\ \iff \beta = \alpha = 0 \quad (\text{car } \lambda \neq \mu)$$

Ainsi :

la famille  $(e_\lambda, e_\mu)$  est libre

2. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ . Montrons que la famille  $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$  est libre. Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_{\lambda_k} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ . On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k e_{\lambda_k}(x) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x) \quad \text{i.e.} \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k x} = 0$$

Supposons que la famille  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ne soit pas nulle. On peut alors définir :

$$\ell = \min \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \alpha_k \neq 0\} \quad (\text{en particulier, } \alpha_\ell \neq 0)$$

La dernière égalité se réécrit alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=\ell}^n \alpha_k e^{\lambda_k x} = 0$$

ce que l'on peut réécrire, en divisant par  $e^{\lambda_\ell x} \neq 0$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_\ell + \sum_{k=\ell+1}^n \alpha_k e^{(\lambda_k - \lambda_\ell)x} = 0$$

Pour tout  $k \in \llbracket \ell+1, n \rrbracket$ , on a  $\lambda_k - \lambda_\ell > 0$  donc  $e^{(\lambda_k - \lambda_\ell)x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ . En faisant tendre  $x$  vers  $-\infty$  dans la dernière relation, on obtient :

$$\alpha_\ell + \sum_{k=\ell+1}^n \alpha_k \times 0 = 0 \quad \text{i.e.} \quad \alpha_\ell = 0,$$

ce qui contredit la définition de  $\ell$ . Finalement :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \alpha_k = 0$$

On peut donc conclure que :

la famille  $\mathcal{E} = (e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  est libre

**Exercice 10** Montrons que la famille  $(f, g, h, i)$  est libre. Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . On suppose que :

$$\alpha f + \beta g + \gamma h + \delta i = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) + \delta i(x) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x),$$

i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \gamma x \sin(x) + \delta x \cos(x) = 0$$

★ Le choix  $x = 0 \in \mathbb{R}$  fournit :

$$\alpha \times 0 + \beta \times 1 + \gamma \times 0 + \delta \times 0 = 0 \quad \text{i.e.} \quad \beta = 0$$

Il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \sin(x) + \gamma x \sin(x) + \delta x \cos(x) = 0$$

★ Pour  $x = \pi \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\alpha \times 0 + \gamma \times 0 + \delta \times (-\pi) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \delta = 0$$

Il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \sin(x) + \gamma x \sin(x) = 0$$

★ Les choix  $x = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$  et  $x = -\frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$  nous donnent les deux relations :

$$\alpha + \frac{\pi}{2}\gamma = 0 \quad \text{et} \quad -\alpha + \frac{\pi}{2}\gamma = 0$$

La résolution du système formé par ces deux équations fournit  $\alpha = \gamma = 0$ .

Finalement,  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$  donc :

la famille  $(f, g, h, i)$  est libre

**Exercice 11** Montrons que la famille  $\mathcal{L}$  est libre. On note :

$$f : x \mapsto e^x, \quad g : x \mapsto e^{2x} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto e^{x^2}$$

Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ . On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\alpha f + \beta g + \gamma h)(x) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x) \quad \text{i.e.} \quad \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$$

soit encore :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha e^x + \beta e^{2x} + \gamma e^{x^2} = 0$$

★ En divisant par  $e^{x^2} \neq 0$ , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha e^{x-x^2} + \beta e^{2x-x^2} + \gamma = 0$$

Comme  $x(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$  et  $e^t \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ , on a par composition des limites :

$$e^{x-x^2} = e^{x(1-x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et, de même,} \quad e^{2x-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

En faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$  dans l'égalité précédente, on obtient donc :

$$\alpha \times 0 + \beta \times 0 + \gamma = 0 \quad \text{i.e.} \quad \gamma = 0$$

★ Il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha e^x + \beta e^{2x} = 0$$

Le choix  $x = 0 \in \mathbb{R}$  fournit l'égalité  $\alpha + \beta = 0$  et le choix  $x = \ln(2) \in \mathbb{R}$  nous donne  $2\alpha + 4\beta = 0$ . La résolution du système formé par ces deux équations fournit  $\alpha = \beta = 0$ .

Finalement,  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . On peut donc conclure que :

la famille  $\mathcal{L} = (f, g, h)$  est libre

**Exercice 12** On pose  $u = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $v = (n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $w = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Montrons que la famille  $\mathcal{L} = (u, v, w)$  est libre. Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = 0 \quad \text{i.e.} \quad \alpha + \beta n^2 + \gamma 2^n = 0$$

Pour  $n = 0$ ,  $n = 1$  et  $n = 2$ , on a :

$$\alpha + \gamma = 0, \quad \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \quad \text{et} \quad \alpha + 4\beta + 4\gamma = 0$$

La résolution du système formé par ces trois équations fournit  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Ainsi :

la famille  $(u, v, w)$  est libre

**Exercice 13** On raisonne par double inclusion.

★ Les polynômes  $(X-1)^2$ ,  $(X-1)(X+1)$  et  $(X+1)^2$  sont à coefficients réels et sont de degrés (inférieurs ou égaux à) 2 donc :

$$(X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2 \in \mathbb{R}_2[X]$$

Or  $\mathbb{R}_2[X]$  est un espace vectoriel, il est stable par combinaisons linéaires. Par conséquent :

$$\text{Vect}((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2) \subset \mathbb{R}_2[X]$$

★ Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ . Montrons que  $P \in \text{Vect}((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2)$ . Il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $P = aX^2 + bX + c$ . Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . On a :

$$P = \alpha(X-1)^2 + \beta(X-1)(X+1) + \gamma(X+1)^2 \\ \iff aX^2 + bX + c = (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (-2\alpha + 2\gamma)X + (\alpha - \beta + \gamma)$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a & \text{L}_1 \\ -2\alpha + 2\gamma = b & \text{L}_2 \\ \alpha - \beta + \gamma = c & \text{L}_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a & \text{L}_1 \\ 2\beta + 4\gamma = 2a + b & \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 + 2\text{L}_1 \\ -2\beta = c - a & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 - \text{L}_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ 4\gamma + 2\beta = 2a + b \\ -2\beta = c - a \end{cases}$$

Le système est triangulaire, il admet donc une solution  $\alpha, \beta, \gamma$ . Autrement dit :

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad P = \alpha(X-1)^2 + \beta(X-1)(X+1) + \gamma(X+1)^2$$

Ainsi,  $P \in \text{Vect}((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2)$ . On a donc l'inclusion :

$$\mathbb{R}_2[X] \subset \text{Vect}((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2)$$

Par double inclusion, on peut conclure que :

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2)$$

**Exercice 14** On raisonne par double inclusion.

★ Montrons que  $\text{Vect}(a, b) \subset \text{Vect}(c, d)$ . Si on montre que :

$$a \in \text{Vect}(c, d) \quad \text{et} \quad b \in \text{Vect}(c, d)$$

alors, comme  $\text{Vect}(c, d)$  est un espace vectoriel, on aura :

$$\{\lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(a, b) \subset \text{Vect}(c, d)$$

Montrons donc que  $a, b \in \text{Vect}(c, d)$ . Soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . On a :

$$a = \lambda c + \mu d \iff (1, 2, -3) = \lambda(-1, 2, -4) + \mu(-6, -8, 11)$$

$$\iff (1, 2, -3) = (-\lambda - 6\mu, 2\lambda - 8\mu, -4\lambda + 11\mu)$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda - 6\mu = 1 & \text{L}_1 \\ 2\lambda - 8\mu = 2 & \text{L}_2 \\ -4\lambda + 11\mu = -3 & \text{L}_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda - 6\mu = 1 & \text{L}_1 \\ -20\mu = 4 & \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 + 2\text{L}_1 \\ 35\mu = -7 & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 - 4\text{L}_1 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont compatibles car elles fournissent toutes les deux la valeur  $\mu = -\frac{1}{5}$ . On en déduit la valeur de  $\lambda$  et donc le système est compatible. Autrement dit :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad a = \lambda c + \mu d$$

Ainsi,  $a \in \text{Vect}(c, d)$ . On procède de la même manière pour montrer que  $b \in \text{Vect}(c, d)$ . Ceci démontre donc la première inclusion.

★ On procède de la même manière pour la deuxième inclusion.

Par double inclusion, on a donc :

$$\boxed{\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(c, d)}$$

## Exercice 15

1. Pour tout entier naturel  $k$ , on considère les fonctions :

$$f_k : x \mapsto \cos(x)^k \quad \text{et} \quad g_k : x \mapsto \cos(kx)$$

On procède par récurrence.

★ Les fonctions  $f_0$  et  $g_0$  sont constantes égales à 1. On a donc  $f_0 = g_0$  et donc  $\text{Vect}(f_0) = \text{Vect}(g_0)$ . L'égalité est donc vraie au rang  $n = 0$ .

★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que :

$$\text{Vect}(f_0, \dots, f_n) \subset \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$$

Montrons que :

$$\text{Vect}(f_0, \dots, f_n, f_{n+1}) \subset \text{Vect}(g_0, \dots, g_n, g_{n+1})$$

Comme :

$$\text{Vect}(f_0, \dots, f_n) \subset \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$$

et

$$\text{Vect}(g_0, \dots, g_n) \subset \text{Vect}(g_0, \dots, g_n, g_{n+1}),$$

on a l'inclusion  $\text{Vect}(f_0, \dots, f_n) \subset \text{Vect}(g_0, \dots, g_n, g_{n+1})$ . Si on montre que  $f_{n+1} \in \text{Vect}(g_0, \dots, g_n, g_{n+1})$ , alors on aura l'inclusion souhaitée. On remarque que  $f_{n+1} = f_n \times f_1$  et on sait que  $f_n \in \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$  donc il existe

$\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $f_n = \sum_{k=0}^n \lambda_k g_k$ . Ainsi :

$$f_{n+1} = \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k f_1$$

Comme  $\text{Vect}(g_0, \dots, g_n, g_{n+1})$  est un espace vectoriel, il suffit de montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad g_k f_1 \in \text{Vect}(g_0, \dots, g_n, g_{n+1})$$

C'est clair pour  $k = 0$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} g_k(x) f_1(x) &= \cos(kx) \cos(x) = \frac{\cos(kx + x) + \cos(kx - x)}{2} \\ &= \frac{\cos((k+1)x) + \cos((k-1)x)}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$g_k f_1 = \frac{g_{k+1} + g_{k-1}}{2} \in \text{Vect}(g_0, \dots, g_n, g_{n+1}) \quad (\text{car } k-1, k+1 \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket)$$

Ainsi,  $f_{n+1} \in \text{Vect}(g_0, \dots, g_n, g_{n+1})$ . Finalement :

$$\text{Vect}(g_0, \dots, g_n) \subset \text{Vect}(g_0, \dots, g_n, g_{n+1}),$$

ce qui prouve l'inclusion au rang  $n+1$ .

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{Vect}(f_0, \dots, f_n) \subset \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons que :

$$\text{Vect}(g_0, \dots, g_n) \subset \text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$$

Soient  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $x \in \mathbb{R}$ . On a :

$$g_k(x) = \cos(kx) = \text{Re}(e^{ikx}) = \text{Re}\left((e^{ix})^k\right) \quad (\text{formule de Moivre})$$

Or, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} (e^{ix})^k &= (\cos(x) + i \sin(x))^k \\ &= \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} i^\ell \sin(x)^\ell \cos(x)^{k-\ell} \\ &= \underbrace{\sum_{p=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2p} (-1)^p \sin(x)^{2p} \cos(x)^{k-2p}}_{\in \mathbb{R}} \\ &\quad + i \underbrace{\sum_{p=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k}{2p+1} (-1)^p \sin(x)^{2p+1} \cos(x)^{k-2p-1}}_{\in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
 g_k(x) &= \sum_{p=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2p} (-1)^p \sin(x)^{2p} \cos(x)^{k-2p} \\
 &= \sum_{p=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2p} (-1)^p (1 - \cos(x)^2)^p \cos(x)^{k-2p} \\
 &= \sum_{p=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2p} (-1)^p \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} (-1)^q \cos(x)^{2q} \cos(x)^{k-2p} \\
 &= \sum_{p=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \sum_{q=0}^p (-1)^{p+q} \binom{k}{2p} \binom{p}{q} \underbrace{\cos(x)^{k-2(p-q)}(x)}_{=f_{k-2(p-q)}(x)}
 \end{aligned}$$

Pour tous  $p \in \llbracket 0, \lfloor k/2 \rfloor \rrbracket$  et  $q \in \llbracket 0, p \rrbracket$ , on a  $p - q \geq 0$  donc  $k - 2(p - q) \leq k \leq n$  donc :

$$g_k \in \text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$$

Or  $\text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$  est un espace vectoriel donc :

$$\text{Vect}(g_0, \dots, g_n) \subset \text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$$

L'inclusion réciproque a été démontrée à la question précédente donc :

$$\boxed{\text{Vect}(f_0, \dots, f_n) = \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)}$$

## Exercice 16

★ Montrons que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{R}^4$ . Tout d'abord,  $F$  et  $G$  sont inclus dans  $\mathbb{R}^4$ . De plus, d'après l'écriture de  $F$ ,

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$$

Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . On a :

$$\begin{aligned}
 (x, y, z, t) \in G &\iff \begin{cases} x + y + z &= 0 & L_1 \\ y - z + t &= 0 & L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -y - z = -2z + t \\ y = z - t \end{cases} \\
 &\iff (x, y, z, t) = (-2z + t, z - t, z, t) \\
 &\iff (x, y, z, t) = z(-2, 1, 1, 0) + t(1, -1, 0, 1)
 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$G = \{z(-2, 1, 1, 0) + t(1, -1, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-2, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1))$$

Ainsi :

$$\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$$

★ Montrons maintenant que  $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ . Soit  $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, montrons que :

$$\exists! (X_F, X_G) \in F \times G, \quad X = X_F + X_G$$

— **Analyse** : supposons qu'il existe  $(X_F, X_G) \in F \times G$  tel que  $X = X_F + X_G$ . Comme  $X_F \in F$ , il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tel que :

$$X_F = \alpha(1, 0, 0, 1) + \beta(0, 1, 1, 0) = (\alpha, \beta, \beta, \alpha)$$

On a alors :

$$X_G = X - X_F = (x, y, z, t) - (\alpha, \beta, \beta, \alpha) = (x - \alpha, y - \beta, z - \beta, t - \alpha)$$

et on sait que  $X_G \in G$  donc :

$$(x - \alpha) + (y - \beta) + (z - \beta) = 0 \quad \text{et} \quad (y - \beta) - (z - \beta) + (t - \alpha) = 0$$

La deuxième égalité nous donne  $\alpha = y - z + t$  et donc :

$$2\beta = x - \alpha + y + z = x + 2z - t \quad \text{donc} \quad \beta = \frac{x}{2} + z - \frac{t}{2}$$

On en déduit que :

$$X_F = \left( y - z + t, \frac{x}{2} + z - \frac{t}{2}, \frac{x}{2} + z - \frac{t}{2}, y - z + t \right)$$

et que :

$$\begin{aligned}
 X_G &= (x - \alpha, y - \beta, z - \beta, t - \alpha) \\
 &= \left( x - y + z - t, -\frac{x}{2} + y - z + \frac{t}{2}, -\frac{x}{2} + \frac{t}{2}, -y + z \right)
 \end{aligned}$$

Ainsi, si  $X \in F + G$ , alors la décomposition de  $X$  comme la somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$  est uniquement déterminé.

— **Synthèse** : considérons les vecteurs  $X_F$  et  $X_G$  obtenus au point précédent. On a :

$$X_F = \underbrace{(y - z + t)}_{\in \mathbb{R}}(1, 0, 0, 1) + \underbrace{\left(\frac{x}{2} + z - \frac{t}{2}\right)}_{\in \mathbb{R}}(0, 1, 1, 0) \in F$$

De plus,  $X_G \in G$  car :

$$(x - y + z - t) + \left(-\frac{x}{2} + y - z + \frac{t}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2} + \frac{t}{2}\right) = 0$$

et :

$$\left(-\frac{x}{2} + y - z + \frac{t}{2}\right) - \left(-\frac{x}{2} + \frac{t}{2}\right) + (-y + z) = 0$$

Enfin :

$$\begin{aligned} X_F + X_G &= \left(y - z + t, \frac{x}{2} + z - \frac{t}{2}, \frac{x}{2} + z - \frac{t}{2}, y - z + t\right) \\ &\quad + \left(x - y + z - t, -\frac{x}{2} + y - z + \frac{t}{2}, -\frac{x}{2} + \frac{t}{2}, -y + z\right) \\ &= (x, y, z, t) \\ &= X \end{aligned}$$

Ainsi,  $X = X_F + X_G \in F + G$ . Ceci prouve l'existence de la décomposition.

On a donc démontré que  $\mathbb{R}^4 \subset F \oplus G$ . L'inclusion réciproque étant immédiate, on peut conclure que :

$$\boxed{\mathbb{R}^4 = F \oplus G}$$

## Exercice 18

★ Montrons que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Tout d'abord, on a  $F \subset E$  par définition de  $F$ .

— La fonction nulle  $0_E$  sur  $[0, 1]$  appartient à  $F$  car :

$$\int_0^1 0_E(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

— Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in F$ . Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f + \lambda g)(t) dt &= \int_0^1 (f(t) + \lambda g(t)) dt \\ &= \int_0^1 f(t) dt + \lambda \int_0^1 g(t) dt \quad (\text{linéarité de l'intégrale}) \\ &= 0 + \lambda \times 0 \quad (\text{car } f, g \in F) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $f + \lambda g \in F$ .

On peut donc conclure que :

$$\boxed{F \text{ est une sous-espace vectoriel de } E}$$

★ Posons  $G = \text{Vect}(x \mapsto 1)$  (espace vectoriel des fonctions constantes sur  $[0, 1]$ ). Comme la fonction constante égale à 1 est continue sur  $[0, 1]$ , l'ensemble  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrons que  $E = F \oplus G$ . Soit  $\varphi \in E$ . Montrons que :

$$\exists! (f, g) \in F \times G, \quad \varphi = f + g$$

en raisonnant par analyse-synthèse.

— **Analyse** : supposons qu'il existe  $(f, g) \in F \times G$  tel que  $\varphi = f + g$ . Comme  $g \in G$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$g : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \lambda \end{cases} \quad (\text{fonction constante égale à } \lambda \text{ sur } [0, 1])$$

Ainsi :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \varphi(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) + \lambda$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x) dx &= \int_0^1 (f(x) + \lambda) dx \\ &= \underbrace{\int_0^1 f(x) dx}_{=0 \text{ car } f \in F} + \lambda \underbrace{\int_0^1 1 dx}_{=1} \quad (\text{linéarité de l'intégrale}) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$g : x \mapsto \int_0^1 \varphi(t) dt \quad \text{et} \quad f : x \mapsto \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(t) dt \quad (*)$$

Ceci assure l'unicité de la décomposition.

— **Synthèse** : considérons les fonctions  $f$  et  $g$  définies par (\*). On a bien  $\varphi = f + g$  et  $g \in G$  (fonction constante). De plus, en posant  $\lambda = \int_0^1 \varphi(t) dt \in \mathbb{R}$ . Alors (par linéarité de l'intégrale) :

$$\int_0^1 f(x) dx = \underbrace{\int_0^1 \varphi(x) dx}_{=\lambda} - \lambda \underbrace{\int_0^1 1 dx}_{=1} = 0$$

Ainsi,  $f \in F$ . Ceci assure l'existence de la décomposition.

On a donc démontré que  $E \subset F \oplus G$ . L'inclusion réciproque étant immédiate, on a :

$$\boxed{E = F \oplus G}$$

**Exercice 20** On sait que  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{I}(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Soit  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Montrons que :

$$\exists (p, i) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{I}(\mathbb{R}), \quad f = p + i$$

en raisonnant par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : supposons qu'il existe  $(p, i) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{I}(\mathbb{R})$  tel que  $f = p + i$ . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (p + i)(x) = p(x) + i(x)$$

et (comme  $p$  est paire et  $i$  est impaire sur  $\mathbb{R}$ ) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a les égalités :

$$f(x) = p(x) + i(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = p(x) - i(x)$$

En résolvant le système formé par ces deux équations, on obtient :

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Ainsi, les fonctions  $p$  et  $i$  sont uniquement déterminées.

★ **Synthèse** : considérons les fonctions  $p$  et  $i$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$(p + i)(x) = p(x) + i(x) = f(x) \quad p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x)$$

et :

$$i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -i(x)$$

Ainsi,  $f = p + i$  et les fonctions  $p$  et  $i$  sont respectivement paire et impaire sur  $\mathbb{R}$ . Ceci assure l'existence de la décomposition.

On a donc démontré que  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(\mathbb{R})$ . L'inclusion réciproque est immédiate donc :

$$\boxed{\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(\mathbb{R})}$$