

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

1 Produits scalaires

Exercice 1 Montrer que les applications suivantes sont des produits scalaires sur E :

- pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k)$ où x_0, \dots, x_n sont des nombres réels deux à deux distincts
- pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\Psi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$
- sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, $(\cdot | \cdot) : (f, g) \mapsto \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$

2 Inégalités

Exercice 2 On définit, sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

- Montrer que cette application définit un produit scalaire sur E .
- Établir que :

$$\forall f \in E, \quad \left(f(1) + \int_0^1 f'(t) dt \right)^2 \leq 2 \left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \right)$$

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les trois questions sont indépendantes.

- Montrer que $\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)^2 \leq n \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$.
- Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2$.
- Montrer que, si $n \geq 2$, alors $\frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}$.

3 Bases orthonormales

Exercice 4 1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

- Donner sans calcul une base orthonormale de $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Exercice 5 Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et e_1, \dots, e_n des vecteurs non nuls de E tels que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2$$

- Montrer que :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle$$

- En déduire que :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

- Établir que $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de E .

Exercice 6 En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, orthonormaliser les familles suivantes :

- $\mathcal{F} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 ;
- $\mathcal{G} = (t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto |t|)$ dans $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$.

Exercice 7 Sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (P, Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

- Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
- Déterminer une base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

4 Orthogonalité

Exercice 8 Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Soit $f \in F^\perp$. Montrer que $f^2 \in F^\perp$.
2. Montrer que $F^\perp = \{0_E\}$.
3. En déduire $F^{\perp\perp}$. L'espace vectoriel E est-il de dimension finie ?

Exercice 9 Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

1. Soit \mathcal{B} une base orthonormale de E . Montrer que la matrice de f dans la base \mathcal{B} est symétrique.
2. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)^\perp$.

Exercice 10 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E .

1. Montrer que :

$$F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$$

et que, si F et G sont de dimension finie, alors :

$$G^\perp \subset F^\perp \implies F \subset G$$

2. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et que, si E est de dimension finie, alors :

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

5 Projection orthogonale

Exercice 11 Soit u un vecteur unitaire d'un espace euclidien E . On note U le vecteur colonne représentant u dans une base orthonormée de E . Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Vect}(u)$ dans \mathcal{B} .

Exercice 12 (caractérisation des projections orthogonales) Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et p une projection sur E . Établir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. p est orthogonale ;
2. $\forall x, y \in E, \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$;
3. $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 13 On munit \mathbb{R}^4 de son produit scalaire usuel. Donner la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 du projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel F d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice 14 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\langle aX^2 + bX + c, \alpha X^2 + \beta X + \gamma \rangle = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

On note F le sous-espace vectoriel de E des polynômes s'annulant en 1.

1. Déterminer une base de F .
2. Calculer $\delta = \inf_{P \in F} \|X - P\|$.

Exercice 15 Calculer le minimum de la fonction :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a, b) & \longmapsto & \int_0^\pi (\sin(x) - ax^2 - bx)^2 dx \end{cases}$$

6 Divers

Exercice 16 Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x \rangle = 0$$

Montrer que :

$$\text{Ker}(u)^\perp = \text{Im}(u)$$

Exercice 17 Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq \|x\|$$

Montrer que :

$$E = \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}_E)$$