

ESPACES VECTORIELS (DIMENSION FINIE)

1 Familles libres, génératrices, bases

Exercice 1 Soient $a \in \mathbb{R}$, $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, a, 1)$ et $w = (1, 1, a)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que (u, v, w) soit une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 2 Les familles suivantes sont-elles des familles génératrices de \mathbb{R}^3 ?

- $\mathcal{F}_1 = ((1, 2, 3), (2, 1, 0))$
- $\mathcal{F}_2 = ((1, 1, 1), (0, 1, 2), (3, 2, -1))$
- $\mathcal{F}_3 = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$
- $\mathcal{F}_4 = ((1, -1, 1), (-1, 1, -1), (2, 3, -1))$
- $\mathcal{F}_5 = ((1, 0, 3), (0, 2, 1), (3, 1, 1), (2, 1, -1))$

Exercice 3 On considère les vecteurs de \mathbb{R}^4 suivants :

$$e = (1, 2, 3, 4) \quad \text{et} \quad f = (1, -2, 3, -4)$$

- Peut-on déterminer $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}(e, f)$?
- Même question avec le vecteur $(x, 1, 1, y)$.

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\varepsilon_i = \sum_{k=1}^i e_k$.

- Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E .
- Exprimer les coordonnées dans \mathcal{B}' d'un vecteur $x \in E$ en fonction de ses coordonnées dans \mathcal{B} .

Exercice 5 Montrer que les fonctions f définies sur $] -1, 1[$ par :

$$\exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in] -1, 1[, f(x) = \alpha \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \beta \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}}$$

forment un \mathbb{R} -espace vectoriel dont on précisera la dimension.

Exercice 6 1. Montrer que la famille :

$$\mathcal{L} = (X^3 + X + 1, X^3 - 2X + 2, X^2 + 3X)$$

est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

- Montrer que la famille $\mathcal{M} = ((8, 4, 1, 2), (1, 3, 0, 5))$ est libre et la compléter en une base de \mathbb{R}^4 .
- Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E . On pose $\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$ et $\varepsilon_2 = e_2 - e_3$. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et la compléter en une base de E .

2 Dimension d'un espace vectoriel

Exercice 7 Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 et déterminer leur dimension :

- $E = \text{Vect}((1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 1, 1))$
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$
- $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y = y + z = 2x - z = 0\}$
- $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y = y + z = x + 2y - z = 0\}$

Exercice 8 Le corps \mathbb{C} peut-être considéré comme un \mathbb{R} ou un \mathbb{C} -espace vectoriel.

- Déterminer la dimension et une base de \mathbb{C} considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{C} . Quels sont les sous- \mathbb{C} -espaces vectoriels de \mathbb{C} ?
- Déterminer la dimension et une base de \mathbb{C} considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{R} . Décrire les sous- \mathbb{R} -espaces vectoriels de \mathbb{C} .

Exercice 9 Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites arithmétiques ? En déterminer une base.

Exercice 10 Soient F le sous-ensemble de \mathbb{R}^4 défini par l'équation :

$$x + z = t + y$$

et G défini par $y + t = x - y - z = 0$.

- Déterminer la dimension ainsi qu'une base de F . Soit $a = (3, 1, 2, 4)$. Vérifier que $a \in F$ et déterminer les coordonnées de a dans cette base.
- Déterminer la dimension ainsi qu'une base de G . Soit $b = (4, 1, 3, -1)$. Vérifier que $b \in G$ et déterminer les coordonnées de b dans cette base.
- Déterminer la dimension et une base de $F \cap G$.

Exercice 11 On désigne par \mathbb{K} le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soient $a \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ et :

$$E = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(a) = 0\}.$$

Démontrer que E est un espace vectoriel et en donner une base et la dimension.

Exercice 12 1. Soit :

$$\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid y'' + y' + y = 0\}$$

Déterminer base de \mathcal{S} en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

- Déterminer une base de \mathcal{S} en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
- Déterminer une base du sous-espace vectoriel \mathcal{S}' de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par :

$$\begin{cases} f'' + 4f = 0 \\ f(\pi) = 0 \end{cases}$$

Exercice 13 1. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs :

$$a = (1, 2, 0) \quad \text{et} \quad b = (-1, 1, 1) \quad ?$$

- Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs :

$$a = (3, 0, -2), \quad b = (0, 3, 1) \quad \text{et} \quad c = (-1, 4, 2) \quad ?$$

- Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs :

$$a = (1, 1, -2), \quad b = (1, 3, 1), \quad c = (-2, 1, 2), \quad d = (1, -1, 1), \quad e = (0, 1, 2), \\ f = (-3, 1, 0) \text{ et } g = (4, 5, 1) ?$$

Exercice 14 1. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $u_i = (\delta_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{L}_n = (u_0, \dots, u_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire quant à la dimension du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{kx}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{L}'_n = (f_0, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Que peut-on en déduire quant à la dimension de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Exercice 15 On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A . Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

3 Sommes et dimension

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, on appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(E) - 1$.

Exercice 16 Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et H, K deux hyperplans distincts de E .

- Justifier que $n \geq 2$.
- Montrer que $\dim(H \cap K) = n - 2$.

Exercice 17 Soient E un espace vectoriel de dimension finie, H un hyperplan de E et D une droite vectorielle de E . Montrer que si $D \not\subset H$, alors D et H sont supplémentaires dans E .

Exercice 18 Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que :

$$\dim(F) + \dim(G) > n.$$

Montrer qu'alors $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Exercice 19 1. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((1, 1, 1))$$

- Déterminer la dimension de G .
- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base et la dimension de F .
- Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

- Reprendre la question 1. dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ avec les sous-espaces :

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((1, \dots, 1))$$

Exercice 20 Dans $E = \mathbb{R}^4$, on pose :

$$G = \{(x, y, z, t) \in E \mid z = t = 0\}$$

et $F = A \cap B$ où :

$$A = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - y + z - t = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y, z, t) \in E \mid 2x - y + 3z - 4t = 0\}$$

- Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
- Montrer que F et G sont supplémentaires dans E . Trouver une base de E adaptée à cette décomposition en somme directe.