Espaces vectoriels

(*quelques corrigés*)

Exercice 2 (*questions* 2. *et* 3.)

On rappelle que, si E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et si $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_n)$ est une famille de vecteurs de E constituée de n vecteurs, alors on sait que :

$$(\mathscr{F} \text{ est libre}) \iff (\mathscr{F} \text{ est un base de } E) \iff (\mathscr{F} \text{ est une famille génératrice de } E)$$

2. On a $\mathrm{Card}(\mathscr{F}_2) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc $\mathscr{F}_2$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\mathscr{F}_2$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\begin{aligned}
\alpha(1,1,1) + \beta(0,1,2) + \gamma(3,2,-1) = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff (\alpha + 3\gamma, \alpha + \beta + 2\gamma, \alpha + 2\beta - \gamma) = (0,0,0) \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccccl} \alpha & & & + & 3\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\ \alpha & + & \beta & + & 2\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_2 \\ \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{cccccccl} \alpha & & + & 3\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\ & \beta & - & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ & 2\beta & - & 4\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{cccccccl} \alpha & & + & 3\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\ & \beta & - & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_2 \\ & & - & 2\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_1 \end{array}\right. \\
&\iff \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathscr{F}_2$ est libre. Finalement :

$$\boxed{\text{la famille } \mathscr{F}_2 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

3. De la même manière, comme $\mathrm{Card}(\mathscr{F}_3) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, la famille $\mathscr{F}_3$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\mathscr{F}_3$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\begin{aligned}
\alpha(0,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,1,0) = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff (\beta + \gamma, \alpha + \gamma, \alpha + \beta) = (0,0,0) \\
&\iff \left\{\begin{array}{cccccccl} \alpha & & & + & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\ \alpha & + & \beta & & & = & 0 & \mathrm{L}_2 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{cccccccl} \alpha & & + & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\ & \beta & - & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ & \beta & + & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{cccccccl} \alpha & & + & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\ & \beta & - & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_2 \\ & & & 2\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \end{array}\right. \\
&\iff \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathscr{F}_3$ est libre. Finalement :

$$\boxed{\text{la famille } \mathscr{F}_3 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $\mathscr{F}_a = \big((a,1,1),(1,a,1),(1,1,a)\big)$. Comme $\mathrm{Card}(\mathscr{F}_a) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, la famille $\mathscr{F}_a$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si elle est libre. On doit donc trouver à quelle condition nécessaire et suffisante sur le paramètre a la famille $\mathscr{F}_a$ est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On résout :

$$
\begin{aligned}
&\alpha(a,1,1) + \beta(1,a,1) + \gamma(1,1,a) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff (a\alpha + \beta + \gamma, \alpha + a\beta + \gamma, \alpha + \beta + a\gamma) = (0,0,0) \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll}
\alpha & + & a\beta & + & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\
\alpha & + & \beta & + & a\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_2 \\
a\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_3
\end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcccccll}
\alpha & + & a\beta & + & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\
 & & (1-a)\beta & + & (a-1)\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\
 & & \underbrace{(1-a^2)}_{=(1-a)(1+a)}\ \beta & + & (1-a)\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - a\,\mathrm{L}_1
\end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcccccll}
\alpha & + & a\beta & + & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\
 & & (1-a)\beta & + & (a-1)\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_2 \\
 & & & & \big[(1-a) - (1+a)(a-1)\big]\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - (1+a)\,\mathrm{L}_2
\end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcccccll}
\alpha & + & a\beta & + & \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\
 & & (1-a)\beta & + & (a-1)\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_2 \\
 & & & & (1-a)(2+a)\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - (1+a)\,\mathrm{L}_2
\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

On distingue ensuite trois cas.

- ⋆ **Premier cas :** $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$
  Dans ce cas, $1 - a \neq 0$ et $(1-a)(2+a) \neq 0$ et le système échelonné précédent admet pour unique solution $(\alpha, \beta, \gamma) = 0_{\mathbb{R}^3}$. La famille $\mathscr{F}_a$ est donc libre.
- ⋆ **Deuxième cas :** $a = 1$
  On reprend la résolution du système (les deux dernières équations de (1) sont les équations « $0 = 0$ ») :

  $$(1) \iff \alpha + \beta + \gamma = 0$$

  Ainsi, $(0,0,0)$ n'est pas la seule solution (par exemple, $(2,-1,-1)$ en est une autre) donc la famille $\mathscr{F}_1$ est liée.
- ⋆ **Troisième cas :** $a = -2$
  De la même manière, on obtient que la famille $\mathscr{F}_{-2}$ est liée (car $0_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas la seule solution du système).

Ainsi, la famille $\mathscr{F}_a$ est libre si et seulement si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. On conclut donc que :

$$\boxed{\text{la famille } \mathscr{F}_a \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ si et seulement si } a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}}$$