# Espaces vectoriels (généralités)

## 1 Espaces vectoriels et combinaisons linéaires

**Exercice 1** 1. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que le vecteur $u_a = (1, -a, 1)$ soit combinaison linéaire des vecteurs

$$v = (1,1,1) \qquad \text{et} \qquad w_a = (a,0,2)$$

2. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \longmapsto \cos(x)^2$ est-il combinaison linéaire de $x \longmapsto 1$ et de $x \longmapsto \cos(2x)$ ?
3. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la fonction $x \longmapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions sin et cos ?
4. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, la matrice $A^2$ s'exprime comme combinaison linéaire de $I_2$ et de $A$.

**Exercice 2** Les ensembles suivants sont-il des espaces vectoriels ? Justifier.

1. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \,\middle|\, x = y\right\}$
2. $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x - 5y - 1 = 0\right\}$
3. $C = \left\{(x,2x,3x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$
4. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^3 + x + y^2 = 0\right\}$
5. $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = y \text{ et } 3y - 2z = 0\right\}$
6. $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, \deg(P) \geqslant 2\right\}$
7. $G = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, P(X^2) = P'(X) + X^4 P(X)\right\}$
8. $H = \left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, f(0) + f(1) = f'(0)\right\}$

**Exercice 3** Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ?

1. L'ensemble $A$ des fonctions 1-périodiques sur $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble $B$ des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble $C$ des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble $D$ des fonctions qui sont la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble $E$ des fonctions majorées sur $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble $F$ des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 4** Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ?

1. L'ensemble $E_1$ des suites réelles convergentes.
2. L'ensemble $E_2$ des suites réelles divergentes.
3. L'ensemble $E_3$ des suites réelles constantes.
4. L'ensemble $E_4$ des suites réelles bornées.
5. L'ensemble $E_5$ des suites réelles de limite nulle.
6. $E_6 = \left\{u \in E \,\middle|\, u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(n^2)\right\}$

**Exercice 5** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F, G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

**Exercice 6** Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles suivants :

$$F = \left\{(\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \,\middle|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

et :

$$G = \left\{(x,y,z) \in E \,\middle|\, x + 2y = 0\right\}$$

1. Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.
2. Déterminer $F \cap G$. Les sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ sont-ils en somme directe ?

## 2 Familles libres et génératrices

**Exercice 7** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x, y, z$ trois vecteurs de $E$ tels que la famille $\mathscr{L} = (x,y,z)$ soit libre. On pose :

$$u = x + y, \qquad v = y + z \qquad \text{et} \qquad w = x + z$$

Montrer que la famille $\mathscr{F} = (u,v,w)$ est libre.

**Exercice 8** On note $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel $r$, on note $f_r$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_r(x) = |x - r|$$

1. Montrer que, si $r$ et $s$ sont des nombres réels distincts, alors la famille $(f_r, f_s)$ est libre.
2. Plus généralement, montrer que la famille $\mathscr{F} = (f_r)_{r\in\mathbb{R}}$ est libre.

**Exercice 9** 1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \neq \mu$. Montrer que la famille :

$$\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x}, x \longmapsto \mathrm{e}^{\mu x}\right)$$

est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2. Plus généralement, montrer que $\mathscr{E} = \left(x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\right)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

**Exercice 10** Montrer que les fonctions :

$$f : x \longmapsto \sin(x), \quad g : x \longmapsto \cos(x), \quad h : x \longmapsto x\sin(x) \quad \text{et} \quad i : x \longmapsto x\cos(x)$$

forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

**Exercice 11** Montrer que la famille :

$$\mathscr{L} = \left(x \longmapsto \mathrm{e}^{x}, x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}, x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}\right)$$

est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

**Exercice 12** Montrer que la famille $\mathscr{L}$ formée des vecteurs $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

**Exercice 13** Démontrer que :

$$\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}\left((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2\right)$$

**Exercice 14** On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$a = (1, 2, -3), \quad b = (3, 2, -2), \quad c = (-1, 2, -4) \quad \text{et} \quad d = (-6, -8, 11)$$

Montrer que $\mathrm{Vect}(a, b) = \mathrm{Vect}(c, d)$.

**Exercice 15** 1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer qu'on a l'inclusion suivante dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto \cos(x)^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n} \subset \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto \cos(kx)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\mathrm{Vect}\left(x \longmapsto \cos(kx)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n} = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto \cos(x)^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$$

# 3 Espaces vectoriels supplémentaires

**Exercice 16** Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles :

$$F = \mathrm{Vect}\big((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\big)$$

et :

$$G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + y + z = 0 \text{ et } y - z + t = 0\right\}$$

Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 17** On note $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et on pose :

$$F = \left\{f \in E \,\middle|\, f \text{ est périodique de période } 1\right\}$$

et :

$$G = \left\{f \in E \,\middle|\, \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0\right\}$$

1. Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.
2. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
3. Les sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ sont-ils supplémentaires dans $E$ ?

**Exercice 18** Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles. On pose :

$$F = \left\{f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$$

Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et en donner un supplémentaire dans $E$.

**Exercice 19** On note $E$ l'ensemble des suites réelles convergentes, $F$ l'ensemble de suites réelles de limite nulle et $G$ l'ensemble des suites réelles constantes.

1. Montrer que $E$, $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

**Exercice 20 (classique)** On note $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{I}(\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires) sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{P}(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{I}(\mathbb{R})$$