Équations différentielles

1 Primitives et calcul intégral

Exercice 1 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un domaine à déterminer :

1. $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-3x^2}$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^4}$
3. $x \longmapsto \dfrac{1}{(2x+1)^3}$
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
5. $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)}$
6. $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
7. $x \longmapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$
8. $x \longmapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos(x)^2}$
9. $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}+x}$
10. $x \longmapsto \tan(x)^2$

Exercice 2 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \cos(x)^2\sin(x)^2$
2. $f : x \longmapsto \sin(2x)^2\cos(x)$

Exercice 3 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{2}{x^2-3x+2}$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{4}{x^2-6x+9}$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2x^2-4x+3}$

Exercice 4 Calculer :

1. l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$;
2. une primitive de $f : x \longmapsto \sin(x)\,\mathrm{sh}(x)$.

Exercice 5 (intégration par parties)

1. Calculer les intégrales suivantes :

   (a) $I = \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

   (b) $J = \displaystyle\int_{-1}^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$

   (c) $K = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t\ln(t)^2\,\mathrm{d}t$

   (d) $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)^2\,\mathrm{d}x$

2. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

   (a) $f : x \longmapsto \arctan(x)$

   (b) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\cos(x)^2}$

   (c) $f : x \longmapsto \arcsin(x)$ (sur $]-1,1[$)

   (d) $f : x \longmapsto x\,\mathrm{ch}(x)$

3. Proposer deux méthodes pour calculer l'intégrale $M = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 (changement de variable) Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $t = \sin(\theta)$;
2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$ en posant $x = \sin(\theta)$;
3. $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$ en posant $t = \mathrm{sh}(x)$;
4. $L = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \dfrac{1}{t}$.

Exercice 7 (changement de variable) Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}-1}}$ en posant $t = \sqrt{\mathrm{e}^{x}-1}$;
2. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ en posant $t = \sqrt{1+x}$;
3. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ en posant $t = \mathrm{e}^{x}$;
4. $f : x \longmapsto \sin(\ln(x))$ en posant $t = \ln(x)$;
5. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+\tan(x)}$ en posant $t = \tan(x)$.

Exercice 8 Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$;
2. $J_{m,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$;
3. $K_{m,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 On pose :

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que les intégrales S et C sont bien définies.
2. Montrer que $S = C$ en utilisant un changement de variable.
3. Déterminer les valeurs de S et C.
4. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t + \sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

2 Équations différentielles du premier ordre

Exercice 10 Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $x\ln(x)y' - y = 2x^2\ln(x)^2$ sur $]0, 1[$;
2. $xy' - y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 1$;
3. $\sqrt{1-x^2}y' - y = 1$ sur $]-1, 1[$;
4. $y' + x^2y + x^2 = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 0$;
5. $y' + \mathrm{th}(x)y = \mathrm{th}(x)$ sur $\mathbb{R}$;
6. $(x-1)y' + y = x$ sur $]1, +\infty[$ avec $y(2) = 2$;
7. $3xy' - 4y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
8. $xy' - 2y = x^3\sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11 Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $4y' + y = \cos(x)$ et $y(0) = 0$;
2. $y' - y = \mathrm{sh}(x)$ et $y(0) = 1$;
3. $y' - 3y = 2\,\mathrm{e}^{3x} - \sin(x)\,\mathrm{e}^{x}$;
4. $y' + 3y = \mathrm{e}^{-3x} + 6$;
5. $y' - y = \cos(x) + \sin(2x)\,\mathrm{e}^{x}$ et $y(0) = 0$;
6. $y' + 4y = 2 + \sin(x)$.

Exercice 12 Déterminer toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) + y(x) = \int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 13

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x)f(y)$$

2. En déduire l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(xy) = f(x)f(y)$$

Exercice 14 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = \mathrm{e}^{x} f(y) + \mathrm{e}^{y} f(x)$$

Exercice 15 Résoudre l'équation différentielle $y' + y = |x|$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 16 (oral CCINP) On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \qquad (H)$$

et :

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-delle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

3 Équations différentielles du second ordre

Exercice 17 Déterminer les solutions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' - 2y = 10\sin(x)$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$;
2. $y'' + 4y = 1 + \sin(2x)$;
3. $y'' - 2y' + 5y = \cos(2x)\,\mathrm{e}^{x}$;
4. $y'' + y' = \mathrm{sh}(x)$;
5. $y'' + 2y' + 4y = \sin(x)$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$;
6. $y'' - 4y' + 4y = 2\,\mathrm{e}^{2x} + 4$, $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 18

1. (a) Montrer que l'équation différentielle $y'' + y = 3x^2$ a une solution de la forme $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire une expression de l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + y = 3x^2 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 2 \end{cases}$$

2. (a) Montrer que l'équation différentielle $2y'' - 3y' + y = x\,\mathrm{e}^{x}$ admet une solution de la forme $x \longmapsto (ax^2 + bx)\,\mathrm{e}^{x}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y'' - 3y' + y = x\,\mathrm{e}^{x}$.

Exercice 19 Résoudre les systèmes différentiels suivants d'inconnue $y, z \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. $\left\{\begin{array}{l} y' - y = z \\ z' + z = 3y \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} y' + 2y = z \\ z' + z = 6y \end{array}\right.$

Exercice 20 On veut résoudre l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2} \qquad (E)$$

sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

1. Soient $y \in \mathscr{D}^2(I, \mathbb{R})$ et $Y : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y(\mathrm{e}^{t}) \end{array}\right.$.
   (a) Calculer les dérivées y' et y'' de y en fonction de Y, Y' et Y''.
   (b) En déduire que y est solution de (E) si et seulement si Y est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E') sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
2. Résoudre l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les solutions de (E) sur I.
4. Montrer qu'il exisrte une unique solution y de (E) sur I telle que $y(1) = y'(1) = 0$.

Exercice 21 1. On considère l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x^2 y'' + 3xy' + y = (x+1)^2 \qquad \text{(E)}$$

   (a) Soit $y \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ une solution de (E). On considère la fonction $z : t \longmapsto y(\mathrm{e}^{t})$. Montrer que z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle $(\mathscr{E})$ à expliciter.
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})$.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle :

$$(1 - x^2) y'' - xy' + y = 0$$

en effectuant le changement de variable $x = \sin(t)$.

Exercice 22 Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2f(-x) + 1$$

Exercice 23 On veut déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^x (x - t) f(t)\, \mathrm{d}t + 1 \qquad (E)$$

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une équation différentielle dont f est solution.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).