

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## 1 Primitives et calcul intégral

**Exercice 1** Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un domaine à déterminer :

- |                                       |                                               |                                   |
|---------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $x \mapsto x e^{-3x^2}$            | 2. $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)^4}$           | 3. $x \mapsto \frac{1}{(2x+1)^3}$ |
| 4. $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$     | 5. $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$ | 6. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$   |
| 7. $x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{x}}$ | 8. $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(x)^2}$ | 9. $x \mapsto e^{e^x + x}$        |
| 10. $x \mapsto \tan(x)^2$             |                                               |                                   |

**Exercice 2** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- |                                        |                                       |
|----------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $f : x \mapsto \cos(x)^2 \sin(x)^2$ | 2. $f : x \mapsto \sin(2x)^2 \cos(x)$ |
|----------------------------------------|---------------------------------------|

**Exercice 3** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- |                                       |                                        |
|---------------------------------------|----------------------------------------|
| 1. $f : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$  | 2. $f : x \mapsto \frac{2}{x^2-3x+2}$  |
| 3. $f : x \mapsto \frac{4}{x^2-6x+9}$ | 4. $f : x \mapsto \frac{1}{2x^2-4x+3}$ |

**Exercice 4** Calculer :

- l'intégrale  $I = \int_0^\pi \sin(t) e^t dt$  ;
- une primitive de  $f : x \mapsto \sin(x) \operatorname{sh}(x)$ .

**Exercice 5 (intégration par parties)**

1. Calculer les intégrales suivantes :

- |                                  |                                                 |
|----------------------------------|-------------------------------------------------|
| (a) $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$    | (b) $J = \int_{-1}^1 \ln(1+x^2) dx$             |
| (c) $K = \int_1^e t \ln(t)^2 dt$ | (d) $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x)^2 dx$ |

2. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- |                                                  |                                            |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| (a) $f : x \mapsto \arctan(x)$                   | (b) $f : x \mapsto \frac{x}{\cos(x)^2}$    |
| (c) $f : x \mapsto \arcsin(x)$ (sur $] -1, 1[$ ) | (d) $f : x \mapsto x \operatorname{ch}(x)$ |

- Proposer deux méthodes pour calculer l'intégrale  $M = \int_0^\pi \sin(t) e^t dt$ .

**Exercice 6 (changement de variable)** Calculer les intégrales suivantes :

- $I = \int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt$  en posant  $t = \sin(\theta)$  ;
- $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(\theta)} d\theta$  en posant  $x = \sin(\theta)$  ;
- $K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$  en posant  $t = \operatorname{sh}(x)$  ;
- $L = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt$  en posant  $u = \frac{1}{t}$ .

**Exercice 7 (changement de variable)** Calculer une primitive des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$  en posant  $t = \sqrt{e^x-1}$  ;
- $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x}}$  en posant  $t = \sqrt{1+x}$  ;
- $f : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$  en posant  $t = e^x$  ;
- $f : x \mapsto \sin(\ln(x))$  en posant  $t = \ln(x)$  ;
- $f : x \mapsto \frac{1}{1+\tan(x)}$  en posant  $t = \tan(x)$ .

**Exercice 8** Soient  $m, n \in \mathbb{N}$ . Calculer les intégrales suivantes :

- $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt$  ;
- $J_{m,n} = \int_0^{2\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt$  ;
- $K_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt$ .

**Exercice 9** On pose :

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t) + \cos(t)} dt \quad \text{et} \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t) + \cos(t)} dt$$

1. Justifier que les intégrales  $S$  et  $C$  sont bien définies.
2. Montrer que  $S = C$  en utilisant un changement de variable.
3. Déterminer les valeurs de  $S$  et  $C$ .
4. En déduire la valeur de  $I = \int_0^1 \frac{1}{t + \sqrt{1-t^2}} dt$ .

## 2 Équations différentielles du premier ordre

**Exercice 10** Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1.  $x \ln(x)y' - y = 2x^2 \ln(x)^2$  sur  $]0, 1[$  ;
2.  $xy' - y = x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec  $y(1) = 1$  ;
3.  $\sqrt{1-x^2}y' - y = 1$  sur  $] -1, 1[$  ;
4.  $y' + x^2y + x^2 = 0$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $y(0) = 0$  ;
5.  $y' + \operatorname{th}(x)y = \operatorname{th}(x)$  sur  $\mathbb{R}$  ;
6.  $(x-1)y' + y = x$  sur  $]1, +\infty[$  avec  $y(2) = 2$  ;
7.  $3xy' - 4y = x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  ;
8.  $xy' - 2y = x^3 \sin(x)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 11** Déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}$  des équations différentielles suivantes :

1.  $4y' + y = \cos(x)$  et  $y(0) = 0$  ;
2.  $y' - y = \operatorname{sh}(x)$  et  $y(0) = 1$  ;
3.  $y' - 3y = 2e^{3x} - \sin(x)e^x$  ;
4.  $y' + 3y = e^{-3x} + 6$  ;
5.  $y' - y = \cos(x) + \sin(2x)e^x$  et  $y(0) = 0$  ;
6.  $y' + 4y = 2 + \sin(x)$ .

**Exercice 12** Déterminer toutes les fonctions  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = \int_0^1 y(t) dt$$

**Exercice 13** 1. Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

2. En déduire l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

**Exercice 14** Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

**Exercice 15** Résoudre l'équation différentielle  $y' + y = |x|$  d'inconnue  $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 16 (oral CCINP)** On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

et :

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation  $(H)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
2. Résoudre l'équation  $(E)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
3. L'équation  $(E)$  admet-elle des solutions sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  ?

## 3 Équations différentielles du second ordre

**Exercice 17** Déterminer les solutions  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des équations différentielles suivantes :

1.  $y'' + y' - 2y = 10 \sin(x)$ ,  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$  ;
2.  $y'' + 4y = 1 + \sin(2x)$  ;
3.  $y'' - 2y' + 5y = \cos(2x)e^x$  ;
4.  $y'' + y' = \operatorname{sh}(x)$  ;
5.  $y'' + 2y' + 4y = \sin(x)$ ,  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$  ;
6.  $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4$ ,  $y(0) = y'(0) = 1$ .

**Exercice 18** 1. (a) Montrer que l'équation différentielle  $y'' + y = 3x^2$  a une solution de la forme  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  où  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

(b) En déduire une expression de l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + y = 3x^2 \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$$

2. (a) Montrer que l'équation différentielle  $2y'' - 3y' + y = xe^x$  admet une solution de la forme  $x \mapsto (ax^2 + bx)e^x$  où  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- (b) En déduire les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $2y'' - 3y' + y = xe^x$ .

**Exercice 19** Résoudre les systèmes différentiels suivants d'inconnue  $y, z \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  :

$$1. \begin{cases} y' - y = z \\ z' + z = 3y \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} y' + 2y = z \\ z' + z = 6y \end{cases}$$

**Exercice 20** On veut résoudre l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2} \quad (E)$$

sur l'intervalle  $I = ]0, +\infty[$ .

1. Soient  $y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$  et  $Y : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y(e^t) \end{cases}$ .
  - (a) Calculer les dérivées  $y'$  et  $y''$  de  $y$  en fonction de  $Y$ ,  $Y'$  et  $Y''$ .
  - (b) En déduire que  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $Y$  est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants  $(E')$  sur  $\mathbb{R}$  que l'on précisera.
2. Résoudre l'équation différentielle  $(E')$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. En déduire les solutions de  $(E)$  sur  $I$ .
4. Montrer qu'il existe une unique solution  $y$  de  $(E)$  sur  $I$  telle que  $y(1) = y'(1) = 0$ .

**Exercice 21** 1. On considère l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 y'' + 3xy' + y = (x+1)^2 \quad (E)$$

- (a) Soit  $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$  une solution de  $(E)$ . On considère la fonction  $z : t \longmapsto y(e^t)$ . Montrer que  $z$  est solution sur  $\mathbb{R}$  d'une équation différentielle  $(\mathcal{E})$  à expliciter.
  - (b) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(\mathcal{E})$ .
  - (c) En déduire l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Résoudre sur  $] -1, 1[$  l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$$

en effectuant le changement de variable  $x = \sin(t)$ .

**Exercice 22** Déterminer toutes les fonctions  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2f(-x) + 1$$

**Exercice 23** On veut déterminer l'ensemble des fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt + 1 \quad (E)$$

Soit  $f$  une solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et déterminer une équation différentielle dont  $f$  est solution.
2. En déduire l'ensemble des solutions de  $(E)$ .