

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(corrigés)

Exercice 1

1. $x \mapsto -\frac{e^{-3x^2}}{6}$ sur $\mathbb{R}$
2. $x \mapsto \frac{1}{3\ln(x)^3}$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
3. $x \mapsto -\frac{1}{4(2x+1)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
4. $x \mapsto \ln(|\ln(x)|)$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
5. $x \mapsto \ln(|\operatorname{sh}(x)|)$ sur $\mathbb{R}^*$
6. $x \mapsto \frac{\ln(x)^2}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
7. $x \mapsto 2\ln(1+\sqrt{x})$ sur $\mathbb{R}_+^*$
8. $x \mapsto -\ln(1+\cos(x)^2)$ sur $\mathbb{R}$
9. $x \mapsto e^{e^x}$ sur $\mathbb{R}$
10. $x \mapsto \tan(x) - x$ sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$

Exercice 2

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin(x) \cos(x))^2 = \frac{\sin(2x)^2}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \cos(4x)}{2} \\ &= \frac{1 - \cos(4x)}{8} \end{aligned}$$

donc :

une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sin(2x)^2 = \frac{1 - \cos(4x)}{2}$$

donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos(x) - \cos(x) \cos(4x)}{2} \\ &= \frac{\cos(x)}{2} - \frac{\cos(x-4x) + \cos(x+4x)}{4} \\ &= \frac{\cos(x)}{2} - \frac{\cos(3x)}{4} - \frac{\cos(5x)}{4} \end{aligned}$$

Donc :

une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\sin(3x)}{12} - \frac{\sin(5x)}{20}$

Exercice 3

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1+x+x^2 \neq 0$ et :

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \right]$$

donc :

$$f(x) = \frac{4}{3} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

Ainsi :

une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{(x-1)(x-2)} = 2 \times \frac{(x-1) - (x-2)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x-1} \end{aligned}$$

donc :

une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ est $x \mapsto 2 \ln(|x - 2|) - 2 \ln(|x - 1|)$

3. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on a :

$$f(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$$

donc :

une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ est $x \mapsto -\frac{4}{x-3}$

4. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 3 &= 2 \left(x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right) = 2 \left[(x-1)^2 + \frac{1}{2} \right] \\ &= (\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 + 1 \end{aligned}$$

donc :

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 + 1}$$

Ainsi :

une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{\text{Arctan}(\sqrt{2}x - \sqrt{2})}{\sqrt{2}}$

Exercice 4

Exercice 5

- On utilise deux intégrations par parties en dérivant à chaque fois la fonction polynomiale. On obtient $I = e - 2$.
 - On intègre $u'(t) = 1$. On obtient $J = 2 \ln(2) - 4 + \pi$.
 - On dérive $t \mapsto \ln(t)^2$. On obtient $K = \frac{e^2 - 1}{4}$.
 - On dérive la fonction polynomiale. On obtient $L = \frac{\pi^2 + 4}{16}$.
- Pour chacune des fonctions, on utilise le théorème fondamental de l'Analyse qui donne une expression intégrale de la fonction proposée.
 - On trouve $x \mapsto x \text{Arctan}(x) - \frac{\ln(x^2 + 1)}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) On trouve $x \mapsto x \tan(x) + \ln(\cos(x))$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (par exemple).

(c) On trouve $x \mapsto \sqrt{1-x^2} + x \text{Arcsin}(x)$ sur $] -1, 1[$.

(d) On trouve $x \mapsto \frac{(x-1)e^x - (x+1)e^{-x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

3. On propose deux méthodes.

★ **Première méthode** : intégration par parties

On utilise deux intégrations par parties (par exemple en dérivant deux fois la fonction exponentielle). On obtient $M = \frac{e^\pi + 1}{2}$.

★ **Deuxième méthode** : avec la formule d'Euler

On a :

$$M = \int_0^\pi e^t \times \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} dt = \frac{M_+ - M_-}{2i}$$

en posant :

$$M_+ = \int_0^\pi e^{(1+i)t} dt \quad \text{et} \quad M_- = \int_0^\pi e^{(1-i)t} dt$$

On a :

$$\begin{aligned} M_+ &= \left[\frac{e^{(1+i)t}}{1+i} \right]_0^\pi = \frac{e^{(1+i)\pi} - 1}{1+i} = \frac{e^\pi e^{i\pi} - 1}{1+i} = \frac{-e^\pi - 1}{1+i} \\ &= -\frac{(e^\pi + 1)(1-i)}{2} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} M_- &= \left[\frac{e^{(1-i)t}}{1-i} \right]_0^\pi = \frac{e^{(1-i)\pi} - 1}{1-i} = \frac{e^\pi e^{-i\pi} - 1}{1-i} = \frac{-e^\pi - 1}{1-i} \\ &= -\frac{(e^\pi + 1)(1+i)}{2} \end{aligned}$$

donc :

$$M_+ - M_- = \frac{(e^\pi + 1)(1+i) - (e^\pi + 1)(1-i)}{2} = i(e^\pi + 1)$$

On retrouve bien $M = \frac{e^\pi + 1}{2}$.

Exercice 6

- On obtient $I = \frac{\pi}{8}$.

- On obtient $J = \frac{\ln(3)}{2}$.
- On obtient $K = \ln(1 + \sqrt{2})$. On sera amené à résoudre l'équation $\text{sh}(x) = 1$ (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) qui se réécrit $X^2 - 2X - 1 = 0$ (en posant $X = \text{sh}(x)$).
- On obtient $L = -L$, i.e. $L = 0$.

Exercice 7 On utilise le théorème fondamental de l'Analyse qui donne une forme intégrale aux primitives des différentes fonctions.

- On trouve $x \mapsto 2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{e^x - 1})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On trouve $x \mapsto \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}$ sur $] -1, +\infty[$.
- On trouve $x \mapsto 2 \operatorname{Arctan}(e^x)$ sur $\mathbb{R}$.
- On trouve $x \mapsto \frac{x}{2}(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)))$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On trouve $x \mapsto \frac{x + \ln(\sin(x) + \cos(x))}{2}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (par exemple).

Exercice 8

Exercice 9

- La fonction $\sin + \cos$ ne s'annule pas et est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont également continues sur ce segment donc les fonctions $\frac{\sin}{\sin + \cos}$ et $\frac{\cos}{\sin + \cos}$ sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Les intégrales proposées sont donc bien définies.
- Il suffit d'utiliser le changement de variable $u = t - \frac{\pi}{2}$ et d'utiliser les formules de symétrie.
- On a $S = C$ et $S + C = \frac{\pi}{2}$ (l'écrire) donc...
- En effectuant le changement de variable $t = \sin(u)$, on obtient $I = C$.

Exercice 10

- L'équation différentielle (notée (E)) est linéaire du premier ordre, et comme la fonction $x \mapsto x \ln(x)$ ne s'annule pas sur $]0, 1[$, elle est équivalente à :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad y'(x) - \frac{1}{x \ln(x)} y(x) = 2x \ln(x)$$

- ★ Une primitive de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x \ln(x)}$ sur $]0, 1[$ est $x \mapsto -\ln(-\ln(x))$.
L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) est donc :

$$\begin{aligned} \left\{ x \mapsto C e^{\ln(-\ln(x))} \mid C \in \mathbb{R} \right\} &= \left\{ x \mapsto -C \ln(x) \mid C \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \mapsto D \ln(x) \mid D \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

- ★ Déterminons une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soit $D \in \mathcal{D}(]0, 1[, \mathbb{R})$. On considère la fonction $y : x \mapsto D(x) \ln(x)$. Cette fonction est dérivable sur $]0, 1[$ comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad y'(x) = D'(x) \ln(x) + \frac{D(x)}{x}$$

Ainsi :

(est solution de (E) sur $]0, 1[$)

$$\iff \forall x \in]0, 1[, \quad y'(x) - \frac{1}{x \ln(x)} y(x) = 2x \ln(x)$$

$$\iff \forall x \in]0, 1[, \quad D'(x) \ln(x) + \frac{D(x)}{x} - \frac{D(x)}{x} = 2x \ln(x)$$

$$\iff \forall x \in]0, 1[, \quad D'(x) = 2x \quad (\text{car } \ln(x) \neq 0)$$

Par exemple, $D : x \mapsto x^2$ convient. Ainsi, $D : x \mapsto x^2 \ln(x)$ est une solution de (E) sur $]0, 1[$.

Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) sur $]0, 1[$ est :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto x^2 \ln(x) + D \ln(x) \mid D \in \mathbb{R} \right\}$$

- L'équation différentielle (notée (E)) est linéaire du premier ordre, et comme $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$(E) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) - \frac{y(x)}{x} = 1 \right)$$

- ★ Une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $-\ln$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) est donc :

$$\left\{ x \mapsto C e^{\ln(x)} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \mapsto Cx \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

★ Déterminons une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ et $y : x \mapsto C(x)x$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables et :

$$\forall x > 0, \quad y'(x) = C'(x)x + C(x)$$

donc :

$$\begin{aligned} (y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) &\iff \forall x > 0, \quad xy'(x) - y(x) = x \\ &\iff \forall x > 0, \quad C'(x)x^2 + C(x)x - C(x)x = x \\ &\iff \forall x > 0, \quad C'(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{car } x \neq 0) \end{aligned}$$

Par exemple, $C : x \mapsto \ln(x)$ convient. Ainsi, une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $x \mapsto x \ln(x)$.

On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\left\{ x \mapsto Cx + x \ln(x) \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

Soient maintenant $C \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto Cx + x \ln(x)$. Alors :

$$y(1) = 1 \iff C = 1$$

Donc :

la solution du problème de Cauchy proposé est la fonction $x \mapsto x + x \ln(x)$

3. Notons (E) cette équation différentielle linéaire du premier ordre. On a :

$$(E) \iff \left(\forall x \in]-1, 1[, \quad y'(x) - \frac{y(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \quad (\text{car } \sqrt{1-x^2} \neq 0)$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $] -1, 1[$ est $x \mapsto \operatorname{Arccos}(x)$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) est donc :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto C e^{-\operatorname{Arccos}(x)} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

On remarque que la fonction $x \mapsto -1$ est solution de (E) . L'ensemble des solutions de (E) sur $] -1, 1[$ est donc :

$\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto C e^{-\operatorname{Arccos}(x)} - 1 \mid C \in \mathbb{R} \right\}$

4. L'équation différentielle, notée (E) , se réécrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + x^2 y(x) = -x^2 \quad (E)$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3}$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) est donc :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto C e^{-\frac{x^3}{3}} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

On remarque ensuite que la fonction $x \mapsto -1$ est solution de (E) . L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto C e^{-\frac{x^3}{3}} - 1 \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

Soient $C \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto C e^{-\frac{x^3}{3}} - 1$. On résout :

$$y(0) = 0 \iff C - 1 = 0 \iff C = 1$$

Ainsi :

la solution du problème de Cauchy proposé est la fonction $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-\frac{x^3}{3}} - 1 \end{cases}$

5. On note (E) cette équation différentielle. Une primitive de la fonction :

$$x \mapsto \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) est donc :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto C e^{-\ln(\operatorname{ch}(x))} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \mapsto \frac{C}{\operatorname{ch}(x)} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

On remarque ensuite que la fonction $x \mapsto 1$ est solution de (E) . L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc :

$\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto \frac{C}{\operatorname{ch}(x)} + 1 \mid C \in \mathbb{R} \right\}$

6. Notons (E) cette équation différentielle. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a $x - 1 \neq 0$ donc :

$$(E) \iff \left(\forall x \in]1, +\infty[, \quad y'(x) + \frac{y(x)}{x-1} = \frac{x}{x-1} \right)$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$ est $x \mapsto \ln(x-1)$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto C e^{-\ln(x-1)} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \mapsto \frac{C}{x-1} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient donc $C \in \mathcal{D}(]1, +\infty[, \mathbb{R})$ et $f_0 : x \mapsto \frac{C(x)}{x-1}$. La fonction f_0 est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$f_0'(x) = \frac{C'(x)(x-1) - C(x)}{(x-1)^2}$$

donc :

$$\begin{aligned} (f_0 \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]1, +\infty[) \\ \iff (\forall x \in]1, +\infty[, \quad (x-1)f_0'(x) + f_0(x) = x) \\ \iff \left(\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{C'(x)(x-1) - C(x)}{x-1} + \frac{C(x)}{x-1} = x \right) \\ \iff (\forall x \in]1, +\infty[, \quad C'(x) = x) \end{aligned}$$

Par exemple, la fonction $C : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ convient. La fonction $f_0 : x \mapsto \frac{x^2}{2(x-1)}$ est donc une solution particulière de (E) sur $]1, +\infty[$. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur $]1, +\infty[$ est :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto \frac{C}{x-1} + \frac{x^2}{2(x-1)} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

7. En notant (E) cette équation différentielle, on a :

$$(E) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) - \frac{4}{3x}y(x) = \frac{1}{3} \right)$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto -\frac{4}{3x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto -\frac{4}{3}\ln(x)$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto C e^{\frac{4}{3}\ln(x)} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \mapsto C x^{\frac{4}{3}} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient $C \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $f_0 : x \mapsto C(x)x^{\frac{4}{3}}$. La fonction f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_0'(x) = C'(x)x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}C(x)x^{\frac{1}{3}}$$

donc :

$$\begin{aligned} (f_0 \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\ \iff (\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 3x f_0'(x) - 4f_0(x) = x) \\ \iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 3x^{\frac{7}{3}}C'(x) + 4C(x)x^{\frac{4}{3}} - 4C(x)x^{\frac{4}{3}} = x \right) \\ \iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad C'(x) = \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{3} \right) \end{aligned}$$

Par exemple, la fonction $C : x \mapsto -x^{-\frac{1}{3}}$ convient. Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc $x \mapsto -x$. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto C x^{\frac{4}{3}} - x \mid C \in \mathbb{R} \right\}}$$

8. On note (E) cette équation différentielle. On a :

$$(E) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = x^2 \sin(x) \right)$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto -\frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto -2\ln(x)$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto C e^{2\ln(x)} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \mapsto C x^2 \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient $C \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $f_0 : x \mapsto C(x)x^2$. On a $f_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_0'(x) = C'(x)x^2 + 2xC(x)$$

donc :

$$\begin{aligned} (f_0 \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\ \iff (\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x f_0'(x) - 2f_0(x) = x^3 \sin(x)) \\ \iff (\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad C'(x)x^3 + 2x^2C(x) - 2C(x)x^2 = x^3 \sin(x)) \\ \iff (\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad C'(x) = \sin(x)) \end{aligned}$$

Par exemple, la fonction $C : x \mapsto -\cos(x)$ convient. Une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc la fonction $f_0 : x \mapsto -x^2 \cos(x)$. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\mathcal{S}_E = \{x \mapsto Cx^2 - x^2 \cos(x) \mid C \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 11

- On trouve $y : x \mapsto \frac{1}{17} \left(4 \sin(x) + \cos(x) - e^{-\frac{x}{4}} \right)$.
- On trouve $y : x \mapsto \frac{3}{4} e^x + \frac{x e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{4}$.
- On trouve $y : x \mapsto A e^{3x} + 2x e^{3x} + \frac{2}{5} e^x \sin(x) + \frac{1}{5} e^x \cos(x)$ où $A \in \mathbb{R}$.
- L'équation différentielle (notée (E)) est linéaire du premier ordre.

★ L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\{x \mapsto C e^{-3x} \mid C \in \mathbb{C}\},$$

puisque une primitive de $x \mapsto 3$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 3x$.

★ Une solution particulière de l'équation différentielle $y' + 3y = 6$ est $x \mapsto 2$. Déterminons maintenant une solution particulière de $y' + 3y = e^{-3x}$ en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient $C \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $y : x \mapsto C(x) e^{-3x}$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = C'(x) e^{-3x} - 3C(x) e^{-3x}$$

donc :

(y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$)

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 3y(x) = e^{-3x}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad C'(x) e^{-3x} - 3C(x) e^{-3x} + 3C(x) e^{-3x} = e^{-3x}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad C'(x) = 1 \quad (\text{car } e^{-3x} \neq 0)$$

Par exemple, $C : x \mapsto x$ convient. Une solution de $y' + 3y = e^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $x \mapsto x e^{-3x}$.

D'après le principe de superposition, une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto 2 + x e^{-3x}$.

★ On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\{x \mapsto 2 + x e^{-3x} + A e^{-3x} \mid A \in \mathbb{C}\}$$

- On trouve $y : x \mapsto C e^x + \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} - \frac{e^x \cos(2x)}{2}$ (où $C \in \mathbb{R}$) puis on ajuste la constante pour que $y(0) = 0$.
- On trouve $y : x \mapsto C e^{-4x} + \frac{4 \sin(x) - \cos(x)}{17} + \frac{1}{2}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 12

On raisonne par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : soit $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = \int_0^1 y(t) dt$$

La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction (constante) $x \mapsto \int_0^1 y(t) dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que y' est dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant la relation vérifiée par y , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) = 0$$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène a pour racines 0 et -1 . Donc :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = A + B e^{-x}$$

★ **Synthèse** : soient $A, B \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto A + B e^{-x}$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = -B e^{-x} \quad \text{donc} \quad y'(x) + y(x) = A$$

Par ailleurs :

$$\int_0^1 y(t) dt = \left[At - B e^{-t} \right]_0^1 = A - B e^{-1} + B$$

Donc :

$$y \text{ vérifie l'équation fonctionnelle sur } \mathbb{R} \iff A = A - B e^{-1} + B \\ \iff B = 0$$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{les fonctions solutions du problème sont les fonctions constantes}}$$

Exercice 13

- On utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

On fixe $y \in \mathbb{R}$. En dérivant par rapport à x dans l'égalité précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x+y) = f(y)f'(x)$$

Finalement :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f'(x+y) = f(y)f'(x)$$

Pour $x = 0$, on a donc :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f'(y) = f'(0)f(y) = Af(y)$$

en posant $A = f'(0)$. On en déduit qu'il existe un nombre réel B tel que $f : x \mapsto B e^{Ax}$. Par ailleurs, en choisissant les valeurs $x = y = 0$ dans l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction f , on a $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) \in \{0, 1\}$. On en déduit que $B \in \{0, 1\}$.

★ **Synthèse** : la fonction nulle vérifie clairement l'équation fonctionnelle proposée. Soit $A \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : x \mapsto e^{Ax}$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = e^{A(x+y)} = e^{Ax} \times e^{Ay} = f(x)f(y)$$

Ainsi, f est solution du problème posé.

Finalement :

les solutions du problème sont les fonctions de la forme $x \mapsto B e^{Ax}$ où $(A, B) \in \mathbb{R} \times \{0, 1\}$

2. On utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ une fonction telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

On considère la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(e^x) \end{cases}$. La fonction g est bien définie car la fonction exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. De plus, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad g(x+y) &= f(e^{x+y}) = f(e^x \times e^y) \\ &= f(e^x)f(e^y) \quad (\text{par hypothèse sur } f) \\ &= g(x)g(y) \end{aligned}$$

D'après la question 1., il existe $(A, B) \in \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = B e^{Ax}$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = g(\ln(x)) = B e^{A \ln(x)} = B x^A$$

★ **Synthèse** : soient $(A, B) \in \mathbb{R} \times \{0, 1\}$. On considère la fonction $f : x \mapsto B x^A$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f(x)f(y) = B^2 x^A y^B = B^2 (xy)^A = B(xy)^A = f(xy)$$

car $B \in \{0, 1\}$. Ainsi, f est solution du problème.

Finalement :

les solutions du problème sont les fonctions de la forme $x \mapsto B x^A$ où $(A, B) \in \mathbb{R} \times \{0, 1\}$

Exercice 14 On utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

En dérivant par rapport à x , on obtient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f'(x+y) = e^x f(y) + e^y f'(x)$$

En choisissant $x = 0$, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f'(y) = f(y) + A e^y \quad (\text{en posant } A = f'(0))$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtient l'existence d'un nombre réel B tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = A x e^x + B e^x$$

En choisissant les valeurs $x = y = 0$ dans la relation initiale vérifiée par f , on obtient $f(0) = f(0) + f(0)$, i.e. $f(0) = 0$. On en déduit que $B = 0$. Finalement, si f est solution du problème, alors il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = A x e^x$$

★ **Synthèse** : soit $A \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : x \mapsto A x e^x$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x+y) = A(x+y) e^{x+y} = A x e^x e^y + A y e^x e^y = e^x f(y) + e^y f(x)$$

Donc f est solution du problème.

Finalement :

les solutions du problème sont les fonctions de la forme $x \mapsto A x e^x$ où $A \in \mathbb{R}$

Exercice 15 On utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

★ **Analyse :** soit $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une solution de l'équation différentielle (notée (E)) sur $\mathbb{R}$. Alors y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad y'(x) + y(x) = x$$

On obtient l'existence d'un nombre réel A tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad y(x) = A e^{-x} + x - 1$$

De même, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y'(x) + y(x) = -x$$

On obtient l'existence d'un nombre réel A tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y(x) = B e^{-x} - x + 1$$

Finalement, si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} A e^{-x} + x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ B e^{-x} - x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

★ **Synthèse :** soient $A, B \in \mathbb{R}$. On considère la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} A e^{-x} + x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ B e^{-x} - x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

D'après ce qui précède, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. La fonction y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue et dérivable en 0.

— On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = A - 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = B + 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} y \text{ est continue en } 0 &\iff \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) \\ &\iff A - 1 = B + 1 \\ &\iff A = B + 2 \end{aligned}$$

On pose donc $A = B + 2$. On a $y(0) = B + 1$.

— Étudions maintenant la dérivabilité de y en 0. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{B e^{-x} - x + 1 - (B + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(B \times \frac{e^{-x} - 1}{x} - 1 \right) \\ &= -B - 1 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(B + 2) e^{-x} + x - 1 - (B + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((B + 2) \times \frac{e^{-x} - 1}{x} + 1 \right) \\ &= -(B + 2) + 1 \\ &= -B - 1 \end{aligned}$$

On en déduit que y est dérivable en 0 (et $y'(0) = -B - 1$).

Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto \begin{cases} (B + 2) e^{-x} + x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ B e^{-x} - x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \mid B \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 16 Fait en TD.

Exercice 17

1. On trouve $y : x \mapsto A e^{-2x} + B e^x - 3 \sin(x) - \cos(x)$ (où $A, B \in \mathbb{R}$) puis on ajuste les constantes A et B pour que y soit solution du problème de Cauchy.
2. $y : x \mapsto A \sin(2x) + B \cos(2x) + \frac{1 - x \cos(2x)}{4}$
3. $y : x \mapsto A \sin(2x) e^x + B \cos(2x) e^x + \frac{x \sin(2x) e^x}{4}$
4. $y : x \mapsto A e^{-x} + B - \frac{x e^{-x}}{2} + \frac{e^x}{4}$
5. $y : x \mapsto A \sin(\sqrt{3}x) e^{-x} + B \cos(\sqrt{3}x) e^{-x} + \frac{3 \sin(x) - 2 \cos(x)}{13}$ puis on ajuste les constantes A et B pour que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
6. $y : x \mapsto A x e^{2x} + B e^{2x} + x^2 e^{2x} + 1$ puis on ajuste les constantes A et B pour que $y(0) = y'(0) = 1$

Exercice 18

1. (a) On trouve $a = 3$, $b = 0$ et $c = -6$.

(b) On obtient que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :

$$\left\{ x \mapsto A \sin(x) + B \cos(x) + 3x^2 - 6 \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Il suffit ensuite de résoudre le système $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ pour déterminer A et B .

2. (a) On obtient $a = \frac{1}{2}$ et $b = -2$.

(b) On obtient :

$$\left\{ x \mapsto A e^{\frac{x}{2}} + B e^x + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) e^x \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 19

Exercice 20

Exercice 21

- 1.
2. On reprend la démarche proposée à la question 1. avec le changement de variable indiqué.

Soit $y \in \mathcal{D}^2(]-1, 1[, \mathbb{C})$ une solution de l'équation différentielle proposée (notée (E)) et considérons la fonction $z : t \mapsto y(\sin(t))$. La fonction $\sin$ est deux fois dérivable sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ à valeurs dans $] -1, 1[$ où la fonction y est deux fois dérivable donc, par composition, la fonction z est deux fois dérivable sur I et, pour tout $t \in I$, on a :

$$z'(t) = \cos(t)y'(\sin(t)) \quad \text{et} \quad z''(t) = -\sin(t)y'(\sin(t)) + \cos(t)^2 y''(\sin(t))$$

Comme y est solution de (E) sur $] -1, 1[$, on a :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad (1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$

Soit $t \in I$. Alors $\sin(t) \in] -1, 1[$ donc :

$$(1 - \sin(t)^2)y''(\sin(t)) - \sin(t)y'(\sin(t)) + y(\sin(t)) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\cos(t)^2 y''(\sin(t)) - \sin(t)y'(\sin(t)) + y(\sin(t)) = 0$$

Ainsi :

$$\forall t \in I, \quad z''(t) + z(t) = 0$$

Autrement dit, z est solution sur I d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants homogène. Les racines de l'équation caractéristique associée sont $\pm i$ donc :

$$\exists A, B \in \mathbb{C}, \quad \forall t \in I, \quad z(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$$

Comme $\sin \circ \arcsin = \text{Id}_{[-1, 1]}$, on a :

$$\begin{aligned} \exists A, B \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in] -1, 1[, \quad y(x) &= y(\sin(\arcsin(x))) \\ &= z(\arcsin(x)) \\ &= A \cos(\arcsin(x)) + B \sin(\arcsin(x)) \\ &= A \sqrt{1 - x^2} + Bx \end{aligned}$$

En notant $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle initiale (E) sur $] -1, 1[$, on a montré l'inclusion :

$$\mathcal{S}_E \subset \left\{ x \mapsto A \sqrt{1 - x^2} + Bx \mid A, B \in \mathbb{C} \right\}$$

On montre par un calcul direct l'inclusion réciproque. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto A \sqrt{1 - x^2} + Bx \mid A, B \in \mathbb{C} \right\}}$$

Exercice 22

On utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2f(-x) + 1$$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(-x)$ l'est également (comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$). On en déduit que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ (autrement dit, $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -2f'(-x) = -2[2f(+x) + 1] = -4f(x) - 2$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + 4f(x) = -2$$

On en déduit qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{1}{2} + A \cos(2x) + B \sin(2x)$$

★ **Synthèse** : soient $A, B \in \mathbb{R}$. On considère la fonction :

$$f : x \mapsto -\frac{1}{2} + A \cos(2x) + B \sin(2x)$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$$

Ainsi :

(f est solution du problème)

$$\iff (\forall x \in \mathbb{R}, -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x) = 2A \cos(2x) - 2B \sin(2x))$$

$$\iff \begin{cases} -2A = -2B \\ 2B = 2A \end{cases}$$

L'implication « $\Leftarrow$ » est claire. Quant à l'implication « $\Rightarrow$ », il suffit de choisir $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$. On obtient la condition nécessaire et suffisante $A = B$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \left\{ x \mapsto -\frac{1}{2} + A(\cos(2x) + \sin(2x)) \mid A \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice 23

1. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

★ Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt + 1$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $t \mapsto t f(t)$ l'est également.

D'après le théorème fondamental de l'Analyse, les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ et

$x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ de dérivées respectives f et $x \mapsto x f(x)$.

On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(t) dt$$

★ Cette égalité montre que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et donc, finalement, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f(x)$$

Ainsi :

$$\boxed{f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et est telle que } f'' = f \text{ sur } \mathbb{R}}$$

2. On raisonne par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle $f'' = f$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = A e^x + B e^{-x}$$

★ **Synthèse** : soient $A, B \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction $f : x \mapsto A e^x + B e^{-x}$. Tout d'abord, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)f(t) dt &= \int_0^x (x-t)(A e^t + B e^{-t}) dt \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} \left[(x-t)(A e^t - B e^{-t}) \right]_0^x + \int_0^x (A e^t - B e^{-t}) dt \\ &= x(B-A) + \left[A e^t + B e^{-t} \right]_0^x \\ &= x(B-A) + A e^x + B e^{-x} - A - B \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, 0 = (B-A)x - A - B + 1 \\ &\iff \begin{cases} B-A=0 \\ -A-B+1=0 \end{cases} \end{aligned}$$

En effet, l'implication « $\Leftarrow$ » est immédiate. Pour l'implication directe « $\Rightarrow$ », il suffit de choisir $x = 0$ puis $x = 1$. On obtient les valeurs $A = B = \frac{1}{2}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction ch est l'unique solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}}$$