Équations différentielles

(*quelques corrigés*)

Exercice 8

2. L'équation différentielle (notée (E)) est linéaire du premier ordre et, comme $x \longmapsto x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$(E) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(x) - \frac{y(x)}{x} = 1\right)$$

   ⋆ Une primitive de $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $-\ln$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) est donc :

$$\left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\ln(x)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \longmapsto Cx \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

   ⋆ Déterminons une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ et $y : x \longmapsto C(x)x$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables et :

$$\forall x > 0, \qquad y'(x) = C'(x)x + C(x)$$

   donc :

$$\begin{aligned}(y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) &\iff \forall x > 0,\ xy'(x) - y(x) = x\\ &\iff \forall x > 0,\ C'(x)x^2 + C(x)x - C(x)x = x\\ &\iff \forall x > 0,\ C'(x) = \frac{1}{x} \text{ (car } x \neq 0)\end{aligned}$$

   Par exemple, $C : x \longmapsto \ln(x)$ convient. Ainsi, une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $x \longmapsto x\ln(x)$.

   On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\left\{x \longmapsto Cx + x\ln(x) \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

   Soient maintenant $C \in \mathbb{R}$ et $y : x \longmapsto Cx + x\ln(x)$. Alors :

$$y(1) = 1 \iff C = 1$$

   Donc :

$$\boxed{\text{la solution du problème de Cauchy proposé est la fonction } x \longmapsto x + x\ln(x)}$$

3. Notons (E) cette équation différentielle linéaire du premier ordre. On a :

$$(E) \iff \left(\forall x \in]-1,1[, \quad y'(x) - \frac{y(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \qquad (\text{car } \sqrt{1-x^2} \neq 0)$$

   Une primitive de la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$ est $x \longmapsto \mathrm{Arccos}(x)$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) est donc :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Arccos}(x)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

   On remarque que la fonction $x \longmapsto -1$ est solution de (E). L'ensemble des solutions de (E) sur $]-1,1[$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Arccos}(x)} - 1 \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$$

4. L'équation différentielle, notée (E), se réécrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) + x^2 y(x) = -x^2 \tag{E}$$

   Une primitive de la fonction $x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3}$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) est donc :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

On remarque ensuite que la fonction $x \longmapsto -1$ est solution de (E). L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S}_E = \left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}} - 1 \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

Soient $C \in \mathbb{R}$ et $y : x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}} - 1$. On résout :

$$y(0) = 0 \iff C - 1 = 0 \iff C = 1$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la solution du problème de Cauchy proposé est la fonction } \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}} - 1 \end{array} \right.}$$

5. On note (E) cette équation différentielle. Une primitive de la fonction $x \longmapsto \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \longmapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) est donc :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\ln(\mathrm{ch}(x))} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \longmapsto \frac{C}{\mathrm{ch}(x)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

On remarque ensuite que la fonction $x \longmapsto 1$ est solution de (E). L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{S}_H = \left\{ x \longmapsto \frac{C}{\mathrm{ch}(x)} + 1 \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}}$$

6. Notons (E) cette équation différentielle. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a $x - 1 \neq 0$ donc :

$$(E) \iff \left(\forall x \in]1, +\infty[, \quad y'(x) + \frac{y(x)}{x-1} = \frac{x}{x-1} \right)$$

Une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$ est $x \longmapsto \ln(x-1)$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) est :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\ln(x-1)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \longmapsto \frac{C}{x-1} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient donc $C \in \mathscr{D}(]1, +\infty[, \mathbb{R})$ et $f_0 : x \longmapsto \dfrac{C(x)}{x-1}$. La fonction f_0 est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$f_0'(x) = \frac{C'(x)(x-1) - C(x)}{(x-1)^2}$$

donc :

$$\begin{aligned} (f_0 \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]1, +\infty[) &\iff (\forall x \in]1, +\infty[,\ (x-1)f_0'(x) + f_0(x) = x) \\ &\iff \left(\forall x \in]1, +\infty[,\ \frac{C'(x)(x-1) - C(x)}{x-1} + \frac{C(x)}{x-1} = x \right) \\ &\iff (\forall x \in]1, +\infty[,\ C'(x) = x) \end{aligned}$$

Par exemple, la fonction $C : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ convient. La fonction $f_0 : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2(x-1)}$ est donc une solution particulière de (E) sur $]1, +\infty[$. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur $]1, +\infty[$ est :

$$\mathscr{S}_E = \left\{ x \longmapsto \frac{C}{x-1} + \frac{x^2}{2(x-1)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

7. En notant (E) cette équation différentielle, on a :

$$(E) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(x) - \frac{4}{3x} y(x) = \frac{1}{3} \right)$$

Une primitive de la fonction $x \longmapsto -\dfrac{4}{3x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto -\dfrac{4}{3}\ln(x)$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) est :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\ln(x)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \longmapsto Cx^{\frac{4}{3}} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient $C \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $f_0 : x \longmapsto C(x)x^{\frac{4}{3}}$. La fonction f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_0'(x) = C'(x)x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}C(x)x^{\frac{1}{3}}$$

donc :

$$\begin{aligned}
(f_0 \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) &\iff \big(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 3xf_0'(x) - 4f_0(x) = x\big) \\
&\iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 3x^{\frac{7}{3}}C'(x) + 4C(x)x^{\frac{4}{3}} - 4C(x)x^{\frac{4}{3}} = x\right) \\
&\iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x) = \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{3}\right)
\end{aligned}$$

Par exemple, la fonction $C : x \longmapsto -x^{-\frac{1}{3}}$ convient. Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc $x \longmapsto -x$. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto Cx^{\frac{4}{3}} - x \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$$

8. On note (E) cette équation différentielle. On a :

$$(E) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = x^2\sin(x)\right)$$

Une primitive de la fonction $x \longmapsto -\dfrac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto -2\ln(x)$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) est :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{2\ln(x)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \longmapsto Cx^2 \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient $C \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $f_0 : x \longmapsto C(x)x^2$. On a $f_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_0'(x) = C'(x)x^2 + 2xC(x)$$

donc :

$$\begin{aligned}
(f_0 \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) &\iff \big(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xf_0'(x) - 2f_0(x) = x^3\sin(x)\big) \\
&\iff \big(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x)x^3 + 2x^2C(x) - 2C(x)x^2 = x^3\sin(x)\big) \\
&\iff \big(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x) = \sin(x)\big)
\end{aligned}$$

Par exemple, la fonction $C : x \longmapsto -\cos(x)$ convient. Une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc la fonction $f_0 : x \longmapsto -x^2\cos(x)$. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto Cx^2 - x^2\cos(x) \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$$