# Équations différentielles

*(corrigés)*

## Exercice 1

1. $x \longmapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-3x^2}}{6}$ sur $\mathbb{R}$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{3\ln(x)^3}$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
3. $x \longmapsto -\dfrac{1}{4(2x+1)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$
4. $x \longmapsto \ln(|\ln(x)|)$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
5. $x \longmapsto \ln(|\mathrm{sh}(x)|)$ sur $\mathbb{R}^*$
6. $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)^2}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
7. $x \longmapsto 2\ln(1+\sqrt{x})$ sur $\mathbb{R}_+^*$
8. $x \longmapsto -\ln(1+\cos(x)^2)$ sur $\mathbb{R}$
9. $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$
10. $x \longmapsto \tan(x) - x$ sur $\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$

## Exercice 2

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = \big(\sin(x)\cos(x)\big)^2 = \frac{\sin(2x)^2}{4} &= \frac{1}{4} \times \frac{1-\cos(4x)}{2} \\ &= \frac{1-\cos(4x)}{8} \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } x \longmapsto \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sin(2x)^2 = \frac{1-\cos(4x)}{2}$$

donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos(x) - \cos(x)\cos(4x)}{2} \\ &= \frac{\cos(x)}{2} - \frac{\cos(x-4x) + \cos(x+4x)}{4} \\ &= \frac{\cos(x)}{2} - \frac{\cos(3x)}{4} - \frac{\cos(5x)}{4} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } x \longmapsto \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\sin(3x)}{12} - \frac{\sin(5x)}{20}}$$

## Exercice 3

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x + x^2 \neq 0$ et :

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$$

donc :

$$f(x) = \frac{4}{3} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } x \longmapsto \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

2. La fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{2}{(x-1)(x-2)} &= 2 \times \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x-1} \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}\setminus\{1,2\} \text{ est } x \longmapsto 2\ln(|x-2|) - 2\ln(|x-1|)}$$

3. La fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$, on a :

$$f(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$$

donc :

$$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}\setminus\{3\} \text{ est } x \longmapsto -\frac{4}{x-3}}$$

4. La fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 3 = 2\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) &= 2\left[(x-1)^2 + \frac{1}{2}\right] \\ &= \left(\sqrt{2}x - \sqrt{2}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

donc :

$$f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2}x - \sqrt{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x - \sqrt{2}\right)^2 + 1}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } x \longmapsto \frac{\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}x - \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}}$$

## Exercice 4

## Exercice 5

1. (a) On utilise deux intégrations par parties en dérivant à chaque fois la fonction polynomiale. On obtient $I = \mathrm{e} - 2$.
   (b) On intègre $u'(t) = 1$. On obtient $J = 2\ln(2) - 4 + \pi$.
   (c) On dérive $t \longmapsto \ln(t)^2$. On obtient $K = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{4}$.
   (d) On dérive la fonction polynomiale. On obtient $L = \dfrac{\pi^2 + 4}{16}$.
2. Pour chacune des fonctions, on utilise le théorème fondamental de l'Analyse qui donne une expression intégrale de la fonction proposée.
   (a) On trouve $x \longmapsto x\operatorname{Arctan}(x) - \dfrac{\ln(x^2+1)}{2}$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) On trouve $x \longmapsto x\tan(x) + \ln(\cos(x))$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (par exemple).
   (c) On trouve $x \longmapsto \sqrt{1-x^2} + x\operatorname{Arcsin}(x)$ sur $]-1,1[$.
   (d) On trouve $x \longmapsto \dfrac{(x-1)\,\mathrm{e}^{x} - (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$.
3. On propose deux méthodes.
   ⋆ **Première méthode :** intégration par parties
   On utilise deux intégrations par parties (par exemple en dérivant deux fois la fonction exponentielle). On obtient $M = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi} + 1}{2}$.
   ⋆ **Deuxième méthode :** avec la formule d'Euler
   On a :

$$M = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{t} \times \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}\,\mathrm{d}t = \frac{M_+ - M_-}{2i}$$

   en posant :

$$M_+ = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad M_- = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(1-i)t}\,\mathrm{d}t$$

   On a :

$$\begin{aligned} M_+ = \left[\frac{\mathrm{e}^{(1+i)t}}{1+i}\right]_0^{\pi} = \frac{\mathrm{e}^{(1+i)\pi} - 1}{1+i} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}\,\mathrm{e}^{i\pi} - 1}{1+i} &= \frac{-\mathrm{e}^{\pi} - 1}{1+i} \\ &= -\frac{(\mathrm{e}^{\pi}+1)(1-i)}{2} \end{aligned}$$

   et :

$$\begin{aligned} M_- = \left[\frac{\mathrm{e}^{(1-i)t}}{1-i}\right]_0^{\pi} = \frac{\mathrm{e}^{(1-i)\pi} - 1}{1-i} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}\,\mathrm{e}^{-i\pi} - 1}{1+i} &= \frac{-\mathrm{e}^{\pi} - 1}{1-i} \\ &= -\frac{(\mathrm{e}^{\pi}+1)(1+i)}{2} \end{aligned}$$

   donc :

$$M_+ - M_- = \frac{(\mathrm{e}^{\pi}+1)(1+i) - (\mathrm{e}^{\pi}+1)(1-i)}{2} = i(\mathrm{e}^{\pi}+1)$$

   On retrouve bien $M = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}$.

## Exercice 6

1. On obtient $I = \dfrac{\pi}{8}$.

2. On obtient $J = \dfrac{\ln(3)}{2}$.
3. On obtient $K = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. On sera amené à résoudre l'équation $\operatorname{sh}(x) = 1$ (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) qui se réécrit $X^2 - 2X - 1 = 0$ (en posant $X = \operatorname{sh}(x)$).
4. On obtient $L = -L$, *i.e.* $L = 0$.

## Exercice 7

On utilise le théorème fondamental de l'Analyse qui donne une forme intégrale aux primitives des différentes fonctions.

1. On trouve $x \longmapsto 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On trouve $x \longmapsto \dfrac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}$ sur $]-1, +\infty[$.
3. On trouve $x \longmapsto 2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. On trouve $x \longmapsto \dfrac{x}{2}\big(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))\big)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. On trouve $x \longmapsto \dfrac{x + \ln(\sin(x)+\cos(x))}{2}$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (par exemple).

## Exercice 8

## Exercice 9

1. La fonction $\sin + \cos$ ne s'annule pas et est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Les fonction sin et cos sont également continues sur ce segment donc les fonction $\dfrac{\sin}{\sin+\cos}$ et $\dfrac{\cos}{\sin+\cos}$ sont continur sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Les intégrales proposées sont donc bien définies.
2. Il suffit d'utiliser le changement de variable $u = t - \dfrac{\pi}{2}$ et d'utiliser les formules de symétrie.
3. On a $S = C$ et $S + C = \dfrac{\pi}{2}$ (l'écrire) donc...
4. En effectuant le changement de variable $t = \sin(u)$, on obtient $I = C$.

## Exercice 10

1. L'équation différentielle (notée $(E)$) est linéaire du premier ordre, et comme la fonction $x \longmapsto x\ln(x)$ ne s'annule pas sur $]0,1[$, elle est équivalente à :

$$\forall x \in ]0,1[, \qquad y'(x) - \frac{1}{x\ln(x)}y(x) = 2x\ln(x)$$

   ⋆ Une primitive de la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]0,1[$ est $x \longmapsto -\ln(-\ln(x))$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(E)$ est donc :

$$\begin{aligned}\left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\ln(-\ln(x))} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\} &= \left\{x \longmapsto -C\ln(x) \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x \longmapsto D\ln(x) \,\middle|\, D \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

   ⋆ Déterminons une solution particulière de $(E)$ en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soit $D \in \mathscr{D}(]0,1[,\mathbb{R})$. On considère la fonction $y : x \longmapsto D(x)\ln(x)$. Cette fonction est dérivable sur $]0,1[$ comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in ]0,1[, \qquad y'(x) = D'(x)\ln(x) + \frac{D(x)}{x}$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned}&(\text{ est solution de } (E) \text{ sur } ]0,1[) \\ \iff\ & \forall x \in ]0,1[,\ y'(x) - \frac{1}{x\ln(x)}y(x) = 2x\ln(x) \\ \iff\ & \forall x \in ]0,1[,\ D'(x)\ln(x) + \frac{D(x)}{x} - \frac{D(x)}{x} = 2x\ln(x) \\ \iff\ & \forall x \in ]0,1[,\ D'(x) = 2x \text{ (car } \ln(x) \neq 0)\end{aligned}$$

   Par exemple, $D : x \longmapsto x^2$ convient. Ainsi, $D : x \longmapsto x^2\ln(x)$ est une solution de $(E)$ sur $]0,1[$.

   Finalement, l'ensemble $\mathscr{S}_E$ des solutions de $(E)$ sur $]0,1[$ est :

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto x^2\ln(x) + D\ln(x) \,\middle|\, D \in \mathbb{R}\right\}}$$

2. L'équation différentielle (notée $(E)$) est linéaire du premier ordre, et comme $x \longmapsto x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$(E) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(x) - \frac{y(x)}{x} = 1\right)$$

   ⋆ Une primitive de $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $-\ln$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(E)$ est donc :

$$\left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\ln(x)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \longmapsto Cx \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

- ⋆ Déterminons une solution particulière de $(E)$ en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ et $y : x \longmapsto C(x)x$. La fonction $y$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables et :

$$\forall x > 0, \qquad y'(x) = C'(x)x + C(x)$$

donc :

$$\begin{aligned}(y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) &\iff \forall x > 0,\ xy'(x) - y(x) = x \\ &\iff \forall x > 0,\ C'(x)x^2 + C(x)x - C(x)x = x \\ &\iff \forall x > 0,\ C'(x) = \frac{1}{x} \text{ (car } x \neq 0)\end{aligned}$$

Par exemple, $C : x \longmapsto \ln(x)$ convient. Ainsi, une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $x \longmapsto x\ln(x)$.

On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\left\{x \longmapsto Cx + x\ln(x) \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

Soient maintenant $C \in \mathbb{R}$ et $y : x \longmapsto Cx + x\ln(x)$. Alors :

$$y(1) = 1 \iff C = 1$$

Donc :

$$\boxed{\text{la solution du problème de Cauchy proposé est la fonction } x \longmapsto x + x\ln(x)}$$

3. Notons $(E)$ cette équation différentielle linéaire du premier ordre. On a :

$$(E) \iff \left(\forall x \in ]-1,1[, \quad y'(x) - \frac{y(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \qquad (\text{car } \sqrt{1-x^2} \neq 0)$$

Une primitive de la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$ est $x \longmapsto \operatorname{Arccos}(x)$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $(H)$ associée à $(E)$ est donc :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\operatorname{Arccos}(x)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

On remarque que la fonction $x \longmapsto -1$ est solution de $(E)$. L'ensemble des solutions de $(E)$ sur $]-1,1[$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\operatorname{Arccos}(x)} - 1 \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$$

4. L'équation différentielle, notée $(E)$, se réécrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) + x^2 y(x) = -x^2 \tag{$E$}$$

Une primitive de la fonction $x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3}$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $(H)$ associée à $(E)$ est donc :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

On remarque ensuite que la fonction $x \longmapsto -1$ est solution de $(E)$. L'ensemble des solutions de $(E)$ est donc :

$$\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}} - 1 \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

Soient $C \in \mathbb{R}$ et $y : x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}} - 1$. On résout :

$$y(0) = 0 \iff C - 1 = 0 \iff C = 1$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la solution du problème de Cauchy proposé est la fonction } \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}} - 1\end{array}\right.}$$

5. On note $(E)$ cette équation différentielle. Une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \longmapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $(H)$ associée à $(E)$ est donc :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\ln(\operatorname{ch}(x))} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \longmapsto \frac{C}{\operatorname{ch}(x)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

On remarque ensuite que la fonction $x \longmapsto 1$ est solution de $(E)$. L'ensemble des solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto \frac{C}{\operatorname{ch}(x)} + 1 \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$$

6. Notons $(E)$ cette équation différentielle. Pour tout $x \in ]1,+\infty[$, on a $x-1 \neq 0$ donc :

$$(E) \iff \left(\forall x \in ]1,+\infty[, \quad y'(x) + \frac{y(x)}{x-1} = \frac{x}{x-1}\right)$$

Une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ sur $]1,+\infty[$ est $x \longmapsto \ln(x-1)$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(H)$ associée à $(E)$ est :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\ln(x-1)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \longmapsto \frac{C}{x-1} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

Déterminons maintenant une solution particulière de $(E)$ en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient donc $C \in \mathscr{D}(]1,+\infty[,\mathbb{R})$ et $f_0 : x \longmapsto \dfrac{C(x)}{x-1}$. La fonction $f_0$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$f_0'(x) = \frac{C'(x)(x-1) - C(x)}{(x-1)^2}$$

donc :

$$\begin{aligned}
&(f_0 \text{ est solution de } (E) \text{ sur } ]1,+\infty[)\\
&\iff (\forall x \in ]1,+\infty[,\ (x-1)f_0'(x) + f_0(x) = x)\\
&\iff \left(\forall x \in ]1,+\infty[,\ \frac{C'(x)(x-1) - C(x)}{x-1} + \frac{C(x)}{x-1} = x\right)\\
&\iff (\forall x \in ]1,+\infty[,\ C'(x) = x)
\end{aligned}$$

Par exemple, la fonction $C : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ convient. La fonction $f_0 : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2(x-1)}$ est donc une solution particulière de $(E)$ sur $]1,+\infty[$. Finalement, l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $]1,+\infty[$ est :

$$\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto \frac{C}{x-1} + \frac{x^2}{2(x-1)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

7. En notant $(E)$ cette équation différentielle, on a :

$$(E) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(x) - \frac{4}{3x}y(x) = \frac{1}{3}\right)$$

Une primitive de la fonction $x \longmapsto -\dfrac{4}{3x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto -\dfrac{4}{3}\ln(x)$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(H)$ associée à $(E)$ est :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\ln(x)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \longmapsto Cx^{\frac{4}{3}} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

Déterminons maintenant une solution particulière de $(E)$ en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient $C \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ et $f_0 : x \longmapsto C(x)x^{\frac{4}{3}}$. La fonction $f_0$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_0'(x) = C'(x)x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}C(x)x^{\frac{1}{3}}$$

donc :

$$\begin{aligned}
&(f_0 \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)\\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 3xf_0'(x) - 4f_0(x) = x)\\
&\iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 3x^{\frac{7}{3}}C'(x) + 4C(x)x^{\frac{4}{3}} - 4C(x)x^{\frac{4}{3}} = x\right)\\
&\iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x) = \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{3}\right)
\end{aligned}$$

Par exemple, la fonction $C : x \longmapsto -x^{-\frac{1}{3}}$ convient. Une solution particulière de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc $x \longmapsto -x$. Finalement, l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto Cx^{\frac{4}{3}} - x \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$$

8. On note $(E)$ cette équation différentielle. On a :

$$(E) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = x^2\sin(x)\right)$$

Une primitive de la fonction $x \longmapsto -\dfrac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto -2\ln(x)$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(H)$ associée à $(E)$ est :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{2\ln(x)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \longmapsto Cx^2 \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

Déterminons maintenant une solution particulière de $(E)$ en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient $C \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ et $f_0 : x \longmapsto C(x)x^2$. On a $f_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_0'(x) = C'(x)x^2 + 2xC(x)$$

donc :

$$\begin{aligned}
&(f_0 \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)\\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xf_0'(x) - 2f_0(x) = x^3\sin(x))\\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x)x^3 + 2x^2C(x) - 2C(x)x^2 = x^3\sin(x))\\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x) = \sin(x))
\end{aligned}$$

Par exemple, la fonction $C : x \longmapsto -\cos(x)$ convient. Une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc la fonction $f_0 : x \longmapsto -x^2\cos(x)$. Finalement, l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto Cx^2 - x^2\cos(x) \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$$

## Exercice 11

1. On trouve $y : x \longmapsto \dfrac{1}{17}\left(4\sin(x) + \cos(x) - \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\right)$.
2. On trouve $y : x \longmapsto \dfrac{3}{4}\,\mathrm{e}^{x} + \dfrac{x\,\mathrm{e}^{x}}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{4}$.
3. On trouve $y : x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{3x} + 2x\,\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{2}{5}\,\mathrm{e}^{x}\,\sin(x) + \dfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{x}\,\cos(x)$ où $A \in \mathbb{R}$.
4. L'équation différentielle (notée $(E)$) est linéaire du premier ordre.
   - ⋆ L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :
   $$\left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-3x} \,\middle|\, C \in \mathbb{C}\right\},$$
   puisqu'une primitive de $x \longmapsto 3$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto 3x$.
   - ⋆ Une solution particulière de l'équation différentielle $y' + 3y = 6$ est $x \longmapsto 2$. Déterminons maintenant une solution particulière de $y' + 3y = \mathrm{e}^{-3x}$ en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient $C \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $y : x \longmapsto C(x)\,\mathrm{e}^{-3x}$. La fonction $y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont et :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) = C'(x)\,\mathrm{e}^{-3x} - 3C(x)\,\mathrm{e}^{-3x}$$
   donc :
   $$\begin{aligned}
   &(y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R})\\
   &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + 3y(x) = \mathrm{e}^{-3x}\\
   &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x)\,\mathrm{e}^{-3x} - 3C(x)\,\mathrm{e}^{-3x} + 3C(x)\,\mathrm{e}^{-3x} = \mathrm{e}^{-3x}\\
   &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x) = 1 \ (\text{car } \mathrm{e}^{-3x} \neq 0)
   \end{aligned}$$
   Par exemple, $C : x \longmapsto x$ convient. Une solution de $y' + 3y = \mathrm{e}^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-3x}$.
   D'après le principe de superposition, une solution particulière de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \longmapsto 2 + x\,\mathrm{e}^{-3x}$.
   - ⋆ On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ est :
   $$\boxed{\left\{x \longmapsto 2 + x\,\mathrm{e}^{-3x} + A\,\mathrm{e}^{-3x} \,\middle|\, A \in \mathbb{C}\right\}}$$
5. On trouve $y : x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{x} + \dfrac{\sin(x) - \cos(x)}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{x}\,\cos(2x)}{2}$ (où $C \in \mathbb{R}$) puis on ajuste la constante pour que $y(0) = 0$.
6. On trouve $y : x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{4\sin(x) - \cos(x)}{17} + \dfrac{1}{2}$ où $C \in \mathbb{R}$.

## Exercice 12

On raisonne par analyse-synthèse.

- ⋆ **Analyse** : soit $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) + y(x) = \int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}t$$
La fonction $y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction (constante) $x \longmapsto \int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $y'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant la relation vérifiée par $y$, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + y'(x) = 0$$
L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène a pour racines $0$ et $-1$. Donc :
$$\exists\, A, B \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = A + B\,\mathrm{e}^{-x}$$
- ⋆ **Synthèse** : soient $A, B \in \mathbb{R}$ et $y : x \longmapsto A + B\,\mathrm{e}^{-x}$. La fonction $y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) = -B\,\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{donc} \qquad y'(x) + y(x) = A$$
Par ailleurs :
$$\int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}t = \Big[At - B\,\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^1 = A - B\,\mathrm{e}^{-1} + B$$
Donc :
$$\begin{aligned}
y \text{ vérifie l'équation fonctionnelle sur } \mathbb{R} &\iff A = A - B\,\mathrm{e}^{-1} + B\\
&\iff B = 0
\end{aligned}$$
On peut donc conclure que :
$$\boxed{\text{les fonctions solutions du problème sont les fonctions constantes}}$$

## Exercice 13

1. On utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

- ⋆ **Analyse :** soit $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x)f(y)$$

On fixe $y \in \mathbb{R}$. En dérivant par rapport à $x$ dans l'égalité précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x+y) = f(y)f'(x)$$

Finalement :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f'(x+y) = f(y)f'(x)$$

Pour $x = 0$, on a donc :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad f'(y) = f'(0)f(y) = Af(y)$$

en posant $A = f'(0)$. On en déduit qu'il existe un nombre réel $B$ tel que $f : x \longmapsto B\,\mathrm{e}^{Ax}$. Par ailleurs, en choisissant les valeurs $x = y = 0$ dans l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction $f$, on a $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) \in \{0, 1\}$. On en déduit que $B \in \{0, 1\}$.

- ⋆ **Synthèse :** la fonction nulle vérifie clairement l'équation fonctionnelle proposée. Soit $A \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{Ax}$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = \mathrm{e}^{A(x+y)} = \mathrm{e}^{Ax} \times \mathrm{e}^{Ay} = f(x)f(y)$$

Ainsi, $f$ est solution du problème posé.

Finalement :

$$\boxed{\text{les solutions du problème sont les fonctions de la forme } x \longmapsto B\,\mathrm{e}^{Ax} \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R} \times \{0, 1\}}$$

2. On utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

- ⋆ **Analyse :** soit $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ une fonction telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(xy) = f(x)f(y)$$

On considère la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(\mathrm{e}^x) \end{array} \right.$. La fonction $g$ est bien définie car la fonction exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad g(x+y) = f\left(\mathrm{e}^{x+y}\right) &= f\left(\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y\right) \\ &= f(\mathrm{e}^x)f(\mathrm{e}^y) \qquad \text{(par hypothèse sur } f) \\ &= g(x)g(y) \end{aligned}$$

D'après la question 1., il existe $(A, B) \in \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = B\,\mathrm{e}^{Ax}$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = g(\ln(x)) = B\,\mathrm{e}^{A\ln(x)} = Bx^A$$

- ⋆ **Synthèse :** soient $(A, B) \in \mathbb{R} \times \{0, 1\}$. On considère la fonction $f : x \longmapsto Bx^A$. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f(x)f(y) = B^2x^Ay^B = B^2(xy)^A = B(xy)^A = f(xy)$$

car $B \in \{0, 1\}$. Ainsi, $f$ est solution du problème.

Finalement :

$$\boxed{\text{les solutions du problème sont les fonctions de la forme } x \longmapsto Bx^A \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R} \times \{0, 1\}}$$

## Exercice 14

On utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

- ⋆ **Analyse :** soit $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x)$$

En dérivant par rapport à $x$, on obtient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f'(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f'(x)$$

En choisissant $x = 0$, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad f'(y) = f(y) + A\,\mathrm{e}^y \qquad \text{(en posant } A = f'(0))$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtient l'existence d'un nombre réel $B$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = Ax\,\mathrm{e}^x + B\,\mathrm{e}^x$$

En choisissant les valeurs $x = y = 0$ dans la relation initiale vérifiée par $f$, on obtient $f(0) = f(0) + f(0)$, *i.e.* $f(0) = 0$. On en déduit que $B = 0$. Finalement, si $f$ est solution du problème, alors il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = Ax\,\mathrm{e}^x$$

- ⋆ **Synthèse :** soit $A \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : x \longmapsto Ax\,\mathrm{e}^x$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x+y) = A(x+y)\,\mathrm{e}^{x+y} = Ax\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y + Ay\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x)$$

Donc $f$ est solution du problème.

Finalement :

$$\boxed{\text{les solutions du problème sont les fonctions de la forme } x \longmapsto Ax\,\mathrm{e}^{x} \text{ où } A \in \mathbb{R}}$$

## Exercice 15

On utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

⋆ **Analyse :** soit $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une solution de l'équation différentielle (notée $(E)$) sur $\mathbb{R}$. Alors $y$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad y'(x) + y(x) = x$$

On obtient l'existence d'un nombre réel $A$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad y(x) = A\,\mathrm{e}^{-x} + x - 1$$

De même, $y$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_-^*$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad y'(x) + y(x) = -x$$

On obtient l'existence d'un nombre réel $A$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad y(x) = B\,\mathrm{e}^{-x} - x + 1$$

Finalement, si $y$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\exists\, A, B \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = \begin{cases} A\,\mathrm{e}^{-x} + x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ B\,\mathrm{e}^{-x} - x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

⋆ **Synthèse :** soient $A, B \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = \begin{cases} A\,\mathrm{e}^{-x} + x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ B\,\mathrm{e}^{-x} - x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

D'après ce qui précède, $y$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. La fonction $y$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue et dérivable en 0.

— On a $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = A - 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = B + 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} y \text{ est continue en } 0 &\iff \lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^+} y(x) \\ &\iff A - 1 = B + 1 \\ &\iff A = B + 2 \end{aligned}$$

On pose donc $A = B + 2$. On a $y(0) = B + 1$.

— Étudions maintenant la dérivabilité de $y$ en 0. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{B\,\mathrm{e}^{-x} - x + 1 - (B+1)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \left( B \times \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x} - 1 \right) \\ &= -B - 1 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(B+2)\,\mathrm{e}^{-x} + x - 1 - (B+1)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \left( (B+2) \times \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x} + 1 \right) \\ &= -(B+2) + 1 \\ &= -B - 1 \end{aligned}$$

On en déduit que $y$ est dérivable en 0 (et $y'(0) = -B - 1$).

Finalement, l'ensemble $\mathscr{S}_E$ des solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ x \longmapsto \begin{cases} (B+2)\,\mathrm{e}^{-x} + x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ B\,\mathrm{e}^{-x} - x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \;\middle|\; B \in \mathbb{R} \right\}}$$

## Exercice 16

Fait en TD.

## Exercice 17

1. On trouve $y : x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-2x} + B\,\mathrm{e}^{x} - 3\sin(x) - \cos(x)$ (où $A, B \in \mathbb{R}$) puis on ajuste les constantes $A$ et $B$ pour que $y$ soit solution du problème de Cauchy.
2. $y : x \longmapsto A\sin(2x) + B\cos(2x) + \dfrac{1 - x\cos(2x)}{4}$
3. $y : x \longmapsto A\sin(2x)\,\mathrm{e}^{x} + B\cos(2x)\,\mathrm{e}^{x} + \dfrac{x\sin(2x)\,\mathrm{e}^{x}}{4}$
4. $y : x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-x} + B - \dfrac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{4}$
5. $y : x \longmapsto A\sin(\sqrt{3}\,x)\,\mathrm{e}^{-x} + B\cos(\sqrt{3}\,x)\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{3\sin(x) - 2\cos(x)}{13}$ puis on ajuste les constantes $A$ et $B$ pour que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
6. $y : x \longmapsto Ax\,\mathrm{e}^{2x} + B\,\mathrm{e}^{2x} + x^2\,\mathrm{e}^{2x} + 1$ puis on ajuste les constantes $A$ et $B$ pour que $y(0) = y'(0) = 1$

## Exercice 18

1. (a) On trouve $a = 3$, $b = 0$ et $c = -6$.

(b) On obtient que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :

$$\left\{ x \longmapsto A\sin(x) + B\cos(x) + 3x^2 - 6 \,\middle|\, A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Il suffit ensuite de résoudre le système $\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array} \right.$ pour déterminer $A$ et $B$.

2. (a) On obtient $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -2$.

   (b) On obtient :

$$\left\{ x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + B\,\mathrm{e}^{x} + \left( \frac{x^2}{2} - 2x \right) \mathrm{e}^{x} \,\middle|\, A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

## Exercice 19

## Exercice 20

## Exercice 21

1.
2. *On reprend la démarche proposée à la question* 1. *avec le changement de variable indiqué.*

   Soit $y \in \mathscr{D}^2(]-1,1[,\mathbb{C})$ une solution de l'équation différentielle proposée (notée $(E)$) et considérons la fonction $z : t \longmapsto y(\sin(t))$. La fonction sin est deux fois dérivable sur $I = \left] -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right[$ à valeurs dans $]-1,1[$ où la fonction $y$ est deux fois dérivable donc, par composition, la fonction $z$ est deux fois dérivable sur $I$ et, pour tout $t \in I$, on a :

$$z'(t) = \cos(t)y'(\sin(t)) \quad \text{et} \quad z''(t) = -\sin(t)y'(\sin(t)) + \cos(t)^2 y''(\sin(t))$$

   Comme $y$ est solution de $(E)$ sur $]-1,1[$, on a :

$$\forall x \in ]-1,1[, \qquad (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$

   Soit $t \in I$. Alors $\sin(t) \in ]-1,1[$ donc :

$$(1-\sin(t)^2)y''(\sin(t)) - \sin(t)y'(\sin(t)) + y(\sin(t)) = 0$$

   c'est-à-dire :

$$\cos(t)^2 y''(\sin(t)) - \sin(t)y'(\sin(t)) + y(\sin(t)) = 0$$

   Ainsi :

$$\forall t \in I, \qquad z''(t) + z(t) = 0$$

   Autrement dit, $z$ est solution sur $I$ d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants homogène. Les racines de l'équation caractéristique associée sont $\pm\, i$ donc :

$$\exists\, A, B \in \mathbb{C},\ \forall t \in I, \qquad z(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$$

   Comme $\sin \circ \arcsin = \mathrm{Id}_{[-1,1]}$, on a :

$$\begin{aligned} \exists\, A, B \in \mathbb{C},\ \forall x \in ]-1,1[, \qquad y(x) &= y(\sin(\arcsin(x))) \\ &= z(\arcsin(x)) \\ &= A\cos(\arcsin(x)) + Bx \\ &= A\sqrt{1-x^2} + Bx \end{aligned}$$

   En notant $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle initiale $(E)$ sur $]-1,1[$, on a montré l'inclusion :

$$\mathscr{S}_E \subset \left\{ x \longmapsto A\sqrt{1-x^2} + Bx \,\middle|\, A, B \in \mathbb{C} \right\}$$

   On montre par un calcul direct l'inclusion réciproque. Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ x \longmapsto A\sqrt{1-x^2} + Bx \,\middle|\, A, B \in \mathbb{C} \right\}}$$

## Exercice 22

On utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

- ⋆ **Analyse :** soit $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2f(-x) + 1$$

  Comme $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(-x)$ l'est également (comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$). On en déduit que $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (autrement dit, $f \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$) et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = -2f'(-x) = -2\big[2f(+x) + 1\big] = -4f(x) - 2$$

  Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) + 4f(x) = -2$$

  On en déduit qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = -\frac{1}{2} + A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

⋆ **Synthèse :** soient $A, B \in \mathbb{R}$. On considère la fonction :

$$f : x \longmapsto -\frac{1}{2} + A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&(f \text{ est solution du problème}) \\
&\quad\Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)) \\
&\quad\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2A = -2B \\ 2B = 2A \end{array}\right.
\end{aligned}$$

L'implication « $\Longleftarrow$ » est claire. Quant à l'implication « $\Longrightarrow$ », il suffit de choisir $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{4}$. On obtient la condition nécessaire et suffisante $A = B$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \left\{ x \longmapsto -\frac{1}{2} + A(\cos(2x) + \sin(2x)) \,\middle|\, A \in \mathbb{R} \right\}}$$

## Exercice 23

1. Soit $f$ une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

   ⋆ Par linéarité de l'intégrale, on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + 1$$

   La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $t \longmapsto tf(t)$ l'est également. D'après le théorème fondamental de l'Analyse, les fonctions $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ de dérivées respectives $f$ et $x \longmapsto xf(x)$. On en déduit que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

   ⋆ Cette égalité montre que $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et donc, finalement, $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$) et :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = f(x)$$

   Ainsi :

   $$\boxed{f \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et est telle que } f'' = f \text{ sur } \mathbb{R}}$$

2. On raisonne par analyse-synthèse.

   ⋆ **Analyse :** soit $f$ une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle $f'' = f$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = A\,\mathrm{e}^x + B\,\mathrm{e}^{-x}$$

   ⋆ **Synthèse :** soient $A, B \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction $f : x \longmapsto A\,\mathrm{e}^x + B\,\mathrm{e}^{-x}$. Tout d'abord, la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

   $$\begin{aligned}
   \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x (x-t)(A\,\mathrm{e}^t + B\,\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t \\
   &\overset{\text{IPP}}{=} \Big[(x-t)(A\,\mathrm{e}^t - B\,\mathrm{e}^{-t})\Big]_0^x + \int_0^x (A\,\mathrm{e}^t - B\,\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t \\
   &= x(B-A) + \Big[A\,\mathrm{e}^t + B\,\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^x \\
   &= x(B-A) + A\,\mathrm{e}^x + B\,\mathrm{e}^{-x} - A - B
   \end{aligned}$$

   Ainsi :

   $$\begin{aligned}
   (f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 0 = (B-A)x - A - B + 1 \\
   &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} B - A = 0 \\ -A - B + 1 = 0 \end{array}\right.
   \end{aligned}$$

   En effet, l'implication « $\Longleftarrow$ » est immédiate. Pour l'implication directe « $\Longrightarrow$ », il suffit de choisir $x = 0$ puis $x = 1$. On obtient les valeurs $A = B = \dfrac{1}{2}$.

   Finalement :

   $$\boxed{\text{la fonction ch est l'unique solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}}$$