Ensembles

(quelques corrigés)

Exercice 3

On raisonne par double implication.

- ⋆ Si $E = F$, alors il est clair que $\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)$.
- ⋆ Réciproquement, supposons que $\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)$. Montrons alors l'égalité $E = F$ en raisonnant par double inclusion.
  - — Montrons que $E \subset F$. Par définition de $\mathscr{P}(E)$, on a $E \in \mathscr{P}(E)$ (puisque E est une partie de E) donc (d'après notre hypothèse) $E \in \mathscr{P}(F)$, ce qui signifie que $E \subset F$.
  - — Les ensembles E et F jouant des rôles symétriques, on a également $F \subset E$.

  Par double inclusion, on a donc $E = F$.

Finalement :

$$\boxed{\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F) \iff E = F}$$

Exercice 4

1. *Vrai.* On le démontre en raisonnant par double inclusion.
   - ⋆ Montrons que $\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. Soit $X \in \mathscr{P}(A \cap B)$. Alors $X \subset A \cap B$ (par définition de l'ensemble des parties d'un ensemble). On a donc $X \subset A$ et $X \subset B$. Autrement dit, $X \in \mathscr{P}(A)$ et $X \in \mathscr{P}(B)$, c'est-à-dire $X \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. Ainsi, on a bien l'inclusion $\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.
   - ⋆ Montrons que $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cap B)$. Soit $X \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. Alors $X \in \mathscr{P}(A)$ et $X \in \mathscr{P}(B)$, ce qui signifie que $X \subset A$ et $X \subset B$. On a donc l'inclusion $X \subset A \cap B$, c'est-à-dire $X \in \mathscr{P}(A \cap B)$. D'où l'inclusion $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cap B)$.

   Par double inclusion, on a montré que :

   $$\boxed{\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)}$$

2. *C'est faux en général.* Fournissons un contre-exemple. Dans $\mathbb{R}$ par exemple, considérons les sous-ensembles $A = \mathbb{R}_-$ et $B = \mathbb{R}_+$. Alors $A \cup B = \mathbb{R}$. La partie $X = \mathbb{R}$ est donc une partie de $\mathbb{R} = A \cup B$ (c'est-à-dire $X \in \mathscr{P}(A \cup B)$, mais X n'est ni une partie de $\mathbb{R}_- = A$, ni une partie de $B = \mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire $X \notin \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$). Donc $\mathscr{P}(A \cup B) \neq \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

Remarque : on vérifie qu'on a toujours l'inclusion $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cup B)$.

Exercice 5

1. On a $\mathscr{P}(\{a\}) = \big\{\varnothing, \{a\}\big\}$ puis :

   $$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a\})) = \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \big\{\{a\}\big\}, \mathscr{P}(\{a\})\Big\}$$

2. On a $\mathscr{P}(\{a,b\}) = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\big\}$ puis :

   $$\begin{aligned}\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a,b\})) = \Big\{&\varnothing, \{\varnothing\}, \big\{\{a\}\big\}, \big\{\{b\}\big\}, \big\{\{a,b\}\big\},\\ &\big\{\varnothing, \{a\}\big\}, \big\{\varnothing, \{b\}\big\}, \big\{\varnothing, \{a,b\}\big\}, \big\{\{a\}, \{b\}\big\}, \big\{\{a\}, \{a,b\}\big\},\\ &\big\{\{b\}, \{a,b\}\big\}, \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}\big\}, \big\{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}\big\},\\ &\big\{\varnothing, \{b\}, \{a,b\}\big\}, \big\{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\big\}, \mathscr{P}(\{a,b\})\Big\}\end{aligned}$$

3. On a $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ donc :

   $$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)) = \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}$$

Exercice 11

3. On suppose que $A \Delta B = A \cap B$. Montrons que $A = B = \varnothing$. D'après l'exercice 10, on a :

   $$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \qquad \text{donc} \qquad (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cap B$$

   Or (par définition du complémentaire d'un ensemble) :

   $$\big[(A \cup B) \setminus (A \cap B)\big] \cap (A \cap B) = \varnothing$$

   donc :

   $$A \cap B = \varnothing = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

   puis $A \cup B = \varnothing$. On en déduit que $A = B = \varnothing$.

Exercice 12

On démontre l'égalité en raisonnant par double inclusion.

- ⋆ Montrons que $(E \times G) \cup (F \times G) \subset (E \cup F) \times G$. Soit $(x, y) \in (E \times G) \cup (F \times G)$. On distingue deux cas.

— **Premier cas :** $(x,y) \in E \times G$.
Alors $x \in E$ donc $x \in E \cup F$ et $(x,y) \in (E \cup F) \times G$.

— **Deuxième cas :** $(x,y) \in F \times G$.
Alors $x \in F$ donc $x \in E \cup F$ et $(x,y) \in (E \cup F) \times G$.

Ceci montre l'inclusion annoncée.

⋆ Montrons que $(E \cup F) \times G \subset (E \times G) \cup (F \times G)$. Soit $(x,y) \in (E \cup F) \times G$. Alors $x \in E \cup F$ et $y \in G$ donc (on raisonne à nouveau par disjonction de cas) :

— si $x \in E$, alors $(x,y) \in E \times G$ et donc $(x,y) \in (E \times G) \cup (F \times G)$;

— si $x \in F$, alors $(x,y) \in F \times G$ et donc $(x,y) \in (E \times G) \cup (F \times G)$.

On a donc l'inclusion réciproque.

Par double inclusion, on a bien démontré l'égalité :

$$\boxed{(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G}$$

Exercice 14

1. Posons :

$$A = (X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) \qquad \text{et} \qquad B = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z)$$

Par distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, on a :

$$\begin{aligned} A &= (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Z}) \cup (Z \cap Y) \cup (\underbrace{\overline{Z} \cap Z}_{=\varnothing}) \\ &= (X \cap Y) \cup \underbrace{(X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z)}_{=B} \end{aligned}$$

Pour montrer que $A = B$, il suffit donc de montrer que :

$$X \cap Y \subset B$$

Soit $x \in X \cap Y$. On raisonne par disjonction de cas.

⋆ **Premier cas :** $x \in Z$.
Alors $x \in Y$ et $x \in Z$ donc $x \in Y \cap Z$ et donc $x \in (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z) = B$.

⋆ **Deuxième cas :** $x \notin Z$.
Alors $x \in X$ et $x \in \overline{Z}$ donc $x \in X \cap \overline{Z}$. Ainsi, $x \in (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z) = B$.

On a donc bien montré l'inclusion $X \cap Y \subset B$. On conclut donc que :

$$\boxed{A = B}$$

2. Par distributivité de la réunion (respectivement de l'intersection) par rapport à l'intersection (respectivement de la réunion), on a :

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \cap (Y \cup Z) \cap (X \cup Z) &= \big[(X \cup Y) \cap (Z \cup Y)\big] \cap (X \cup Z) \\ &= \big[(X \cap Z) \cup Y\big] \cap (X \cup Z) \\ &= \big[(X \cap Z) \cap (X \cup Z)\big] \cup \big[Y \cap (X \cup Z)\big] \\ &= (X \cap Z) \cup (Y \cap X) \cup (Y \cap Z) \end{aligned}$$

car $X \cap Z \subset X \cup Z$. Ainsi :

$$\boxed{(X \cup Y) \cap (Y \cup Z) \cap (X \cup Z) = (X \cap Y) \cup (Y \cap Z) \cup (X \cap Z)}$$

Exercice 16

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathscr{P} \cap \mathscr{I} \neq \varnothing$. Il existe alors $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in \mathscr{P}$ et $x \in \mathscr{I}$. Donc il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k$ et $x = 2\ell + 1$. Ainsi :

$$2k = 2\ell + 1 \qquad \text{ce qui implique que} \qquad k - \ell = \frac{1}{2}$$

On obtient une absurdité puisque $k - \ell$ est un entier alors que $\dfrac{1}{2}$ n'en est pas un. Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{P} \cap \mathscr{I} = \varnothing}$$