Éléments de théorie des ensembles

1 Vocabulaire

Exercice 1 Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x, y, z trois éléments deux à deux distincts de E. Peut-on écrire que :

1. $x \in E$ 2. $\{x\} \in E$ 3. $\{x\} \subset E$ 4. $\varnothing \in E$

5. $\varnothing \subset E$ 6. $\{\varnothing\} \subset E$ 7. $\{x, y\} \subset E$ 8. $\{y, z\} \subset E \setminus \{x\}$

Exercice 2 Écrire en compréhension les ensembles ci-dessous notés A, B, C et D respectivement.

1. l'ensemble des fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de période $T > 0$ donnée ;
2. l'ensemble des fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
3. l'ensemble des applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
4. l'ensemble des fonctions strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$.

2 Ensemble des parties d'un ensemble

Exercice 3 Soient E et F deux ensembles. Montrer que :

$$\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F) \iff E = F$$

Exercice 4 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Vrai ou faux ? Justifier.

1. $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$;
2. $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

Exercice 5 Soient a et b deux éléments distincts d'un ensemble E. Expliciter les ensembles $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a\}))$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a, b\}))$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$.

3 Démontrer avec des ensembles

Exercice 6 On considère les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$A = \left\{ \frac{\lambda}{k(k+1)} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lambda \in \{-1, 1\} \right\} \qquad \text{et} \qquad B = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Étudier les inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$.
Indication : justifier qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

Exercice 7 Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Exercice 8 Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que :

$$(E \setminus A) \setminus (E \setminus B) = B \setminus A$$

Exercice 9 Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E. Justifier les équivalences suivantes :

1. $A \subset B \iff A \cup B = B$;
2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$;
3. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$;
4. $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C$;
5. $A \subset B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Exercice 10 (différence symétrique) Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A \Delta B$, l'ensemble :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Montrer que :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Exercice 11 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. On définit la différence symétrique de A et B par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Montrer que :

1. $A\Delta B = A\Delta C \iff B = C$;
2. $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$;
3. $A\Delta B = A \cap B \Longrightarrow A = B = \varnothing$.

Exercice 12 (produit cartésien) Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que :

$$(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$$

Exercice 13 (simplifications ensemblistes) Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Simplifier l'écriture des ensembles suivants.

1. $W = A \cup (\overline{A} \cap B)$
2. $X = A \cap (\overline{A} \cup B)$
3. $Y = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$
4. $Z = \overline{A \cup B \cup \overline{C}} \cap (A \cap \overline{B})$

Exercice 14 Soient X, Y et Z trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Montrer que :
$$(X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z),$$
2. Montrer que :
$$(X \cup Y) \cap (Y \cup Z) \cap (X \cup Z) = (X \cap Y) \cup (Y \cap Z) \cup (X \cap Z)$$

4 Divers

Exercice 15 (fonctions indicatrices) Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle *fonction indicatrice* de la partie A, l'application $\mathbf{1}_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \qquad \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles les fonctions indicatrices ?

1. $\min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$
2. $\max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$
3. $\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$
4. $1 - \mathbf{1}_A$
5. $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$
6. $(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2$

Exercice 16 (un entier est soit pair, soit impair) On considère les deux sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ suivants :

$$\mathscr{P} = \left\{2k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{I} = \left\{2k+1 \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Montrer que $\mathscr{P} \cap \mathscr{I} = \varnothing$.

Exercice 17 (équations ensemblistes) Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$.

1. Résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.
2. Résoudre l'équation $A \cap X = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.