

DEVOIR SURVEILLÉ 9

durée de l'épreuve : 2h

- *La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.*
- *Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.*
- *La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le sujet comporte deux pages et est composé de trois exercices, tous indépendants les uns des autres.

Exercice 1 (étude d'une application linéaire).

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi(P) = (X - X^2)P'' + (1 - 2X)P'$$

On note $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base \mathcal{B}_c de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. L'application φ est-elle injective ? surjective ? Justifier.
4. Justifier que la famille $\mathcal{B} = (1, 2X - 1, 6X^2 - 6X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice B de φ dans la base \mathcal{B} .
5. Expliciter :
 - (a) la matrice de passage (notée P) de la base \mathcal{B}_c vers la base \mathcal{B} ;
 - (b) la matrice de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}_c ;
 - (c) le lien entre les matrices A , B et P (*aucune justification n'est demandée*).
6. Calculer A^n pour tout entier naturel n non nul. *On attend une réponse dans laquelle les neuf coefficients de la matrice sont explicités.*

Exercice 2 (calcul d'un gros déterminant).

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on considère le déterminant de taille $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n(a) = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. Expliciter et calculer les déterminants $\Delta_2(a)$, $\Delta_3(a)$ et $\Delta_4(a)$.
2. Déterminer la valeur de $\Delta_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Dans la suite, on suppose que a est un nombre réel non nul.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, montrer que :

$$\Delta_n(a) = a\Delta_{n-1}(a) - (n-1)^2 a^{n-2}$$

4. Démontrer enfin que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \Delta_n(a) = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

Exercice 3 (dénombrement).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que S_n désigne l'ensemble des applications $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ qui sont bijectives. Si $\sigma \in S_n$, on appelle *point fixe* de σ tout entier $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sigma(a) = a$.

Pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $x_{n,p}$ le nombre d'éléments de S_n ayant exactement p points fixes.

1. (a) Déterminer les valeurs de $x_{n,n}$ et $x_{n,n-1}$.
(b) Montrer l'égalité :

$$\sum_{k=0}^n x_{n,k} = n!$$

2. On pose $\omega_n = x_{n,0}$ et on convient que $\omega_0 = 1$. L'objectif de la suite de l'exercice est de calculer $x_{n,0}$.

- (a) Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_{n,k} = \binom{n}{k} \omega_{n-k}$$

- (b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = 1$$

- (c) À l'aide d'une récurrence forte, établir que :

$$\omega_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$