# Devoir Surveillé 9

*un corrigé*

## Exercice 1 (étude d'une application linéaire).

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il est clair que $\varphi(P)$ est un polynôme (car $\mathbb{R}[X]$ est stable par somme, produit et dérivation). Il reste à montrer que $\deg(\varphi(P)) \leqslant 2$. On a $\deg(P) \leqslant 2$ donc $\deg(P') \leqslant 1$ et $\deg(P'') \leqslant 0$ puis, en utilisant les propriétés sur le degré :

$$\begin{aligned}\deg(\varphi(P)) &\leqslant \max\big(\deg((X-X^2)P''), \deg((1-2X)P')\big)\\ &= \max\big(\deg(X-X^2)+\deg(P''), \deg(1-2X)+\deg(P')\big)\\ &= \max\big(2+\deg(P''), 1+\deg(P')\big)\\ &\leqslant 2,\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi, $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Montrons maintenant que $\varphi$ est linéaire. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(P+\lambda Q) &= (X-X^2)(P+\lambda Q)'' + (1-2X)(P+\lambda Q)'\\ &= (X-X^2)(P''+\lambda Q'') + (1-2X)(P'+\lambda Q') \qquad \text{(par linéarité de la dérivation)}\\ &= (X-X^2)P'' + \lambda(X-X^2)Q'' + (1-2X)P' + \lambda(1-2X)Q'\\ &= (X-X^2)P'' + (1-2X)P' + \lambda\big[(X-X^2)Q'' + (1-2X)Q'\big]\\ &= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi$ est linéaire. Finalement :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X]}$$

2. On a $\varphi(1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$,

$$\varphi(X) = 1-2X \qquad \text{et} \qquad \varphi(X^2) = 2(X-X^2) + 2X(1-2X) = 4X - 6X^2$$

Donc :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ de } \varphi \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}_2[X] \text{ est } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}}$$

3. On a $\det(f) = \det(A) = 0$ (la matrice $A$ est triangulaire) donc $f$ n'est pas bijective. Comme $\varphi$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension finie, l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité sont des notions équivalentes donc :

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ n'est ni injective, ni surjective}}$$

4. La famille $\mathscr{B}$ est composée de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ de degrés deux à deux distincts donc $\mathscr{B}$ est libre. Par ailleurs, $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$ donc :

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$$

De plus, $\varphi(1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$,

$$\varphi(2X-1) = 2(1-2X) = -2(2X-1) \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned}\varphi(6X^2-6X+1) &= 12(X-X^2) + (1-2X)(12X-6)\\ &= -36X^2 + 36X - 6\\ &= -6(6X^2-6X+1)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la matrice de } \varphi \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}}$$

5. (a) Par définition d'une matrice de passage, on a :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -6\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}}$$

(b) On remarque que :

$$X = \frac{1}{2}(2X-1) + \frac{1}{2}\times 1 \qquad \text{et} \qquad X^2 = \frac{1}{6}(6X^2-6X+1) + \frac{1}{2}(2X-1) + \frac{1}{3}\times 1$$

donc :

$$\boxed{\text{la matrice de passage cherchée est } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}$$

**Remarque :** on peut aussi obtenir la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}_c$ en calculant directement l'inverse de $P$.

(c) D'après le cours, on a l'égalité :

$$\boxed{A = PBP^{-1}}$$

6. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PB^nP^{-1}$$

★ On a $PB^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence et la question précédente, on a :

$$A^{n+1} = A^nA = PB^nP^{-1}PBP^{-1} = PB^nI_3BP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}$$

d'où l'égalité au rang $n+1$, ce qui achève la récurrence.

Comme $B$ est une matrice diagonale on a, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-6)^n \end{pmatrix}$$

et donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-6)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^{n-1} & (-2)^{n-1} - (-6)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n & (-2)^n - (-6)^n \\ 0 & 0 & (-6)^n \end{pmatrix}}$$

# Exercice 2 (calcul d'un gros déterminant).

1. On a :

$$\boxed{\Delta_2(a) = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1}$$

De plus, la règle de Sarrus nous donne :

$$\boxed{\Delta_3(a) = \begin{vmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 5a}$$

Enfin (on développe le déterminant par rapport à la première colonne) :

$$\Delta_4(a) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 3 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{vmatrix} = a\Delta_3(a) - 3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{\Delta_4(a) = a(a^3 - 5a) - 3\times 3a^2 = a^4 - 14a^2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Les colonnes $C_{n-2}$ et $C_{n-1}$ du déterminant $\Delta_n(0)$ sont :

$$C_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C_{n-2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2C_{n-1}$$

La famille des colonnes du déterminant est donc liée. Or un déterminant est une forme antisymétrique donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \qquad \Delta_n(0) = 0}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$. En développant le déterminant $\Delta_n(a)$ par rapport à la première colonne, on a :

$$\Delta_n(a) = a \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-2 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & a & 1 \\ n-2 & \dots & 2 & 1 & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(n-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & n-1 \\ a & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}}_{\text{noté } \delta_{n-1}(a)}$$

$$= a\Delta_{n-1} + (-1)^{n+1}(n-1)\delta_{n-1}(a)$$

En développant ensuite le déterminant $\delta_{n-1}(a)$, qui est de taille $(n-1) \times (n-1)$, par rapport à la première ligne, on a :

$$\delta_{n-1}(a) = (-1)^n(n-1) \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^n(n-1)a^{n-2}$$

car le dernier déterminant est celui d'une matrice diagonale de taille $(n-2) \times (n-2)$. Comme :

$$(-1)^n(-1)^{n+1} = -1,$$

on obtient finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}, \qquad \Delta_n(a) = a\Delta_{n-1}(a) - (n-1)^2 a^{n-2}}$$

4. On procède par récurrence.
   - ⋆ On a :

     $$a^2 - a^0 \sum_{i=1}^{1} i^2 = a^2 - 1 = \Delta_2(a)$$

     d'après la question 1. L'égalité est vérifiée pour $n = 2$.
   - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On suppose que $\Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$. En utilisant la question précédente, il vient :

     $$\begin{aligned} \Delta_{n+1}(a) = a\Delta_n(a) - n^2 a^{n-1} &= a\left(a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2\right) - n^2 a^{n-1} \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= a^{n+1} - a^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2\right) \\ &= a^{n+1} - a^{n-1}\sum_{i=1}^{n} i^2 \end{aligned}$$

     L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.

   Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad \Delta_n(a) = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2}$$

# Exercice 3 (dénombrement).

1. (a) Dire qu'une permutation $\sigma \in S_n$ admet $n$ points fixes signifie que :

   $$(\forall a \in [\![1,n]\!],\ \sigma(a) = a) \qquad i.e. \qquad \sigma = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$$

   Ainsi :

   $$\boxed{x_{n,n} = 1}$$

   Supposons que $\sigma \in S_n$ admette exactement $n-1$ points fixes. Il existe donc $b \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(b) \neq b$ et :

   $$\forall a \in [\![1,n]\!] \setminus \{b\}, \qquad \sigma(a) = a$$

   On a $\sigma(b) \in [\![1,n]\!]$ et $\sigma(b) \neq b$ donc il existe $a \in [\![1,n]\!] \setminus \{b\}$ tel que $\sigma(b) = a$. Mais $a = \sigma(a)$ donc $\sigma(b) = \sigma(a)$. Ceci est absurde car $\sigma$ est injective (car bijective) et $b \neq a$. Il n'existe donc pas de permutation $\sigma \in S_n$ admettant exactement $n-1$ points fixes. Finalement :

   $$\boxed{x_{n,n-1} = 0}$$

(b) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $S_n^{(k)}$ l'ensemble des permutations de $S_n$ admettant extaement $k$ points fixes. On a alors l'égalité :

$$S_n = \bigsqcup_{k=0}^{n} S_n^{(k)} \qquad \text{(réunion disjointe)}$$

On en déduit que :

$$\boxed{|S_n| = \sum_{k=0}^{n} |S_n^{(k)}| = \sum_{k=0}^{n} x_{n,k}}$$

2. (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Pour construire un élément $\sigma$ de $S_n^{(p)}$, on doit :

- ⋆ choisir les $k$ points fixes de $\sigma$ parmi les entiers de 1 à $n$, ce qui donne $\binom{n}{k}$ choix possibles ;
- ⋆ en notant $a_1, \ldots, a_k$ les points fixes de $\sigma$, il reste à construire l'application :

$$\sigma_{|[\![1,n]\!]\setminus\{a_1,\ldots,a_k\}} : [\![1, n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \longrightarrow [\![1, n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$$

qui est nécessairement une application bijective de $[\![1, n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ dans lui-même, sans point fixe (sinon le nombre de points fixes de $\sigma$ serait supérieur ou égal à $k + 1$), ce qui nous donne $x_{n-k,0} = \omega_{n-k}$ choix possibles.

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad x_{n,p} = \binom{n}{k}\omega_{n-k}}$$

(b) On utilise successivement les questions 1.(b) et 2.(a) :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_{n,k}}{n\,!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n\,!}\binom{n}{k}\omega_{n-k}$$

En explicitant le coefficient binomial, on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k\,!\,(n-k)\,!} = 1}$$

(c) On utilise une récurrence forte.

- ⋆ On a :

$$0\,!\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k\,!} = 1 = \omega_0$$

par définition de $\omega_0$. L'égalité est donc vraie pour $n = 0$.

- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad \omega_k = k\,!\sum_{\ell=0}^{k} \frac{(-1)^\ell}{\ell\,!},$$

soit encore :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \frac{\omega_{n-k}}{(n-k)\,!} = \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^\ell}{\ell\,!}$$

En utilisant la question précédente, on a :

$$\frac{\omega_n}{n\,!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k\,!\,(n-k)\,!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!}\sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^\ell}{\ell\,!}$$

Le changement d'indice $i = \ell + k$ dans la dernière somme fournit :

$$\begin{aligned}\frac{\omega_n}{n\,!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!}\sum_{i=k}^{n} \frac{(-1)^{i-k}}{(i-k)\,!} &= 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i\,!}\sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k}(-1)^k \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i\,!}\Big[(1-1)^i - 1\Big]\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton. Il reste donc (puisque $0^i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$) :

$$\frac{\omega_n}{n\,!} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i\,!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i\,!}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n$.

Par principe de récurrence forte, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \omega_n = n\,!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k\,!}}$$