

DEVOIR SURVEILLÉ 9

un corrigé

Exercice 1.

Première partie

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - \lambda^3 L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - \lambda^2 L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - \lambda L_1$, on obtient :

$$\det(A(\lambda)) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 0 & 1 - \lambda^4 & \lambda(1 - \lambda^4) & \lambda^2(1 - \lambda^4) \\ 0 & 0 & 1 - \lambda^4 & \lambda(1 - \lambda^4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda^4 \end{vmatrix}$$

On obtient le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure), ce qui nous permet de conclure que :

$$\boxed{\det(A(\lambda)) = (1 - \lambda^4)^3}$$

2. Les racines du polynôme $(1 - X^4)^3$ sont $-1, 1, -i$ et i (les racines 4^e de l'unité).

★ Si $\lambda \notin \{-1, 1, -i, i\}$, alors $\det(A(\lambda)) \neq 0$ et donc la matrice $A(\lambda)$ est inversible, c'est-à-dire est de rang 4.

★ On a :

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(i) = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ -i & 1 & i & -1 \\ -1 & -i & 1 & i \\ i & -1 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

et $A(-i) = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ i & 1 & -i & -1 \\ -1 & i & 1 & -i \\ -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix}$. Pour chacune des quatre matrices, les vecteurs colonnes sont non nuls et colinéaires. Celles-ci sont donc de rang 1.

Ainsi :

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \text{rg}(A(\lambda)) = \begin{cases} 4 & \text{si } \lambda \notin \{-1, 1, -i, i\} \\ 1 & \text{si } \lambda \in \{-1, 1, -i, i\} \end{cases}}$$

3. (a) On a $\text{Card}(\mathcal{B}) = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}^4$ si et seulement si $\det(\mathcal{B}) \neq 0$. Or (on effectue les opérations élémentaires $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour tout $k \in \{2, 3, 4\}$) :

$$\det(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i-1 & -2 & -i-1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -i-1 & -2 & i-1 \end{vmatrix}$$

On développe le déterminant par rapport à la première colonne puis on effectue l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\det(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} i-1 & -2 & -i-1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -i-1 & -2 & i-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i-1 & -2 & -i-1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2i & 0 & 2i \end{vmatrix}$$

On développe ensuite par rapport à la deuxième colonne :

$$\det(\mathcal{B}) = -(-2) \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2i & 2i \end{vmatrix} = 2(-4i - 4i) = -16i \neq 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la famille } \mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{C}^4}$$

- (b) On a :

$$A(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 \\ 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 \\ 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 \\ 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 \end{pmatrix} = (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i\lambda-\lambda^2-i\lambda^3 \\ \lambda^3+i-\lambda-i\lambda^2 \\ \lambda^2+i\lambda^3-1-i\lambda \\ \lambda+i\lambda^2-\lambda^3-i \end{pmatrix} = (1+i\lambda-\lambda^2-i\lambda^3) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix},$$

$$A(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda+\lambda^2-\lambda^3 \\ \lambda^3-1+\lambda-\lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda^3+1-\lambda \\ \lambda-\lambda^2+\lambda^3-1 \end{pmatrix} = (1-\lambda+\lambda^2-\lambda^3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et :

$$A(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i\lambda-\lambda^2+i\lambda^3 \\ \lambda^3-i-\lambda+i\lambda^2 \\ \lambda^2-i\lambda^3-1+i\lambda \\ \lambda-i\lambda^2-\lambda^3+i \end{pmatrix} = (1-i\lambda-\lambda^2+i\lambda^3) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

Comme f_λ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à la matrice $A(\lambda)$, ces égalités se réécrivent :

$$f_\lambda(e_1) = (1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3)e_1, \quad f_\lambda(e_2) = (1+i\lambda-\lambda^2-i\lambda^3)e_2, \quad f_\lambda(e_3) = (1-\lambda+\lambda^2-\lambda^3)e_3$$

et $f_\lambda(e_4) = (1-i\lambda-\lambda^2+i\lambda^3)e_4$. On en déduit que :

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} 1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i\lambda-\lambda^2-i\lambda^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda+\lambda^2-\lambda^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i\lambda-\lambda^2+i\lambda^3 \end{pmatrix}$$

On sait que le déterminant d'un endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ est celui de toute matrice représentant cet endomorphisme donc $\det(A(\lambda)) = \det(f_\lambda) = \det(D(\lambda))$. Ainsi :

$$\det(A(\lambda)) = (1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3)(1+i\lambda-\lambda^2-i\lambda^3)(1-\lambda+\lambda^2-\lambda^3)(1-i\lambda-\lambda^2+i\lambda^3)$$

En développant ce produit, on retrouve l'égalité $\det(A(\lambda)) = (1-\lambda^4)^3$.

Deuxième partie

4. Soient $p, q \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$(\Omega\overline{\Omega})_{p,q} = \sum_{k=1}^n \omega^{(p-1)(k-1)} \omega^{-(k-1)(q-1)} = \sum_{k=1}^n \omega^{(p-q)(k-1)}$$

On distingue deux cas.

★ **Premier cas** : $p = q$

Alors :

$$(\Omega\overline{\Omega})_{p,q} = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

★ **Deuxième cas** : $p \neq q$

Posons $\varphi = \omega^{p-q} = e^{i\frac{2(p-q)\pi}{n}}$. On a $p-q \in \llbracket -(n-1), n-1 \rrbracket$ et $p-q \neq 0$ donc $p-q$ n'est pas un multiple de n . On en déduit que $\frac{2(p-q)\pi}{n} \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et donc $\varphi \neq 1$. Par conséquent :

$$(\Omega\overline{\Omega})_{p,q} = \sum_{k=1}^n \varphi^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \varphi^\ell = \frac{1-\varphi^n}{1-\varphi} = 0$$

car $\varphi^n = 1$.

Finalement :

$$\Omega\overline{\Omega} = nI_n, \text{ égalité que l'on peut réécrire } \Omega \left(\frac{1}{n}\overline{\Omega} \right) = I_n, \text{ donc la matrice } \Omega \text{ est inversible d'inverse } \Omega^{-1} = \frac{1}{n}\overline{\Omega}$$

5. Soient $p, q \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned}(A\Omega)_{p,q} &= \sum_{k=1}^n a_{k-p} [n] \omega^{(k-1)(q-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} a_{k-p} [n] \omega^{(k-1)(q-1)} + \sum_{k=p}^n a_{k-p} [n] \omega^{(k-1)(q-1)} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} a_{k-p+n} \omega^{(k-1)(q-1)}}_{\text{notée } S_1} + \underbrace{\sum_{k=p}^n a_{k-p} \omega^{(k-1)(q-1)}}_{\text{notée } S_2}\end{aligned}$$

Le changement d'indice $\ell = k - p$ dans la somme S_2 fournit :

$$S_2 = \sum_{\ell=0}^{n-p} a_{\ell} \omega^{(\ell+p-1)(q-1)} = \left(\sum_{\ell=0}^{n-p} a_{\ell} (\omega^{q-1})^{\ell} \right) \omega^{(p-1)(q-1)}$$

Dans la somme S_1 , on effectue le changement d'indice $\ell = k - p + n$:

$$S_1 = \sum_{\ell=n-p+1}^{n-1} a_{\ell} \omega^{(\ell+(p-1)+n)(q-1)} = \left(\sum_{\ell=n-p+1}^{n-1} a_{\ell} (\omega^{q-1})^{\ell} \right) \omega^{(p-1)(q-1)} \times \underbrace{\omega^{n(q-1)}}_{=1}$$

Ainsi :

$$(A\Omega)_{p,q} = S_1 + S_2 = \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell} (\omega^{q-1})^{\ell} \right) \omega^{(p-1)(q-1)} = P(\omega^{q-1}) \omega^{(p-1)(q-1)}$$

Donc :

$$\boxed{\forall p, q \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (A\Omega)_{p,q} = P(\omega^{q-1}) \omega^{(p-1)(q-1)}}$$

6. En notant $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice Ω , l'égalité obtenue à la question 5. se réécrit :

$$A\Omega = (P(1)C_1 \mid P(\omega)C_2 \mid P(\omega^2)C_3 \mid \dots \mid P(\omega^{n-1})C_n)$$

La multilinéarité du déterminant nous donne :

$$\begin{aligned}\det(A\Omega) &= P(1)P(\omega)P(\omega^2) \dots P(\omega^{n-1}) \det(C_1 \mid C_2 \mid C_3 \mid \dots \mid C_n) \\ &= P(1)P(\omega)P(\omega^2) \dots P(\omega^{n-1}) \det(\Omega)\end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que $\det(A\Omega) = \det(A) \det(\Omega)$, et comme $\det(\Omega) \neq 0$, on obtient en divisant par $\det(\Omega)$:

$$\boxed{\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)}$$

7. Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Si $P : z \mapsto a + bz + cz^2$, on a d'après la question précédente (et puisque α est un déterminant circulant) :

$$\boxed{\alpha = P(1)P(j)P(j^2) = (a + b + c)(a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc)}$$

Comme $e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, on a avec $P : z \mapsto a + bz + cz^2 + dz^3$:

$$\boxed{\beta = P(1)P(i)P(-1)P(-i) = (a + b + c + d)(a + ib - c - id)(a - b + c - d)(a - ib - c + id)}$$

Exercice 2.

1. On sait que :

$$S_1 = \{\text{Id}_{\{1\}}\}, \quad S_2 = \left\{ \text{Id}_{\{1,2\}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

et :

$$S_3 = \left\{ \text{Id}_{\llbracket 1,3 \rrbracket}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} D_1 &= \emptyset, & D_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} & \text{et} & D_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ \text{et :} & & d_1 &= 0, & d_2 &= 1 & \text{et} & d_3 &= 2 \end{aligned}}$$

2. (a) Soient $p \in \mathbb{N}$, $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} \binom{p}{k} \binom{k}{\ell} &= \frac{p!}{k!(p-k)!} \times \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} = \frac{p!}{(p-k)!\ell!(k-\ell)!} \\ &= \frac{(p-\ell)!}{(k-\ell)!(p-k)!} \times \frac{p!}{\ell!(p-\ell)!} \\ &= \binom{p-\ell}{k-\ell} \binom{p}{\ell} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \forall \ell \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \binom{p}{k} \binom{k}{\ell} = \binom{p-\ell}{k-\ell} \binom{p}{\ell}}$$

(b) Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $b_k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} a_\ell$. Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k b_k &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} a_\ell \\ &= \sum_{0 \leq \ell \leq k \leq p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{\ell} a_\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^p \sum_{k=\ell}^p (-1)^k \binom{p-\ell}{k-\ell} \binom{p}{\ell} a_\ell \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= \sum_{\ell=0}^p (-1)^\ell \binom{p}{\ell} a_\ell \sum_{k=\ell}^p (-1)^{k-\ell} \binom{p-\ell}{k-\ell} \end{aligned} \quad (*)$$

Pour tout $\ell \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on a en effectuant le changement d'indice $i = k - \ell$ dans la somme intérieure :

$$\begin{aligned} \sum_{k=\ell}^p (-1)^{k-\ell} \binom{p-\ell}{k-\ell} &= \sum_{i=0}^{p-\ell} (-1)^i \binom{p-\ell}{i} = (1 + (-1))^{p-\ell} \quad (\text{formule du binôme de Newton}) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = p \\ 0 & \text{si } \ell \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \end{cases} \end{aligned}$$

Il reste donc dans (*) :

$$\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k b_k = (-1)^p \binom{p}{p} a_p = (-1)^p a_p$$

et comme $(-1)^{2p} = 1$, on a bien la relation attendue, à savoir :

$$\boxed{\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_p = (-1)^p \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k b_k}$$

Le lemme est donc démontré.

3. (a) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour construire un élément de S_n admettant exactement k points fixes, on doit :

- ★ choisir les k points fixes de la permutation : il y a $\binom{n}{k}$ façons de les choisir ;
- ★ si $i_1, \dots, i_k$ sont ces points fixes, il reste à déterminer $\tilde{\sigma} = \sigma_{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_k\}}$. Cette application $\tilde{\sigma}$ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ sans point fixe. Il y a $d_{n-k} = |D_{n-k}|$ façons de construire $\tilde{\sigma}$.

Le nombre d'éléments de S_n admettant k points fixes est donc $\binom{n}{k} |D_{n-k}|$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad |X_k| = \binom{n}{k} d_{n-k}}$$

(b) Les ensembles $X_0, \dots, X_n$ sont deux à deux disjoints et on a l'égalité :

$$S_n = X_0 \sqcup X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$$

donc :

$$\begin{aligned} |S_n| &= \sum_{k=0}^n |X_k| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{n-\ell} d_\ell \quad (\text{changement d'indice } \ell = n - k) \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} d_\ell \end{aligned}$$

par symétrie des coefficients binomiaux. Comme on sait que $|S_n| = n!$, on a bien :

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$$

(c) ★ La formule précédente pour $n = 4$ nous donne :

$$24 = d_0 + 4d_1 + 6d_2 + 4d_3 + d_4 \quad i.e. \quad d_4 = 24 - 1 - 4 \times 0 - 6 \times 1 - 4 \times 2 = 9$$

★ De même, pour $n = 5$:

$$120 = d_0 + 5d_1 + 10d_2 + 10d_3 + 5d_4 + d_5$$

i.e.

$$d_5 = 120 - 1 - 5 \times 0 - 10 \times 1 - 10 \times 2 - 5 \times 9 = 44$$

Ainsi :

$$d_4 = 9 \quad \text{et} \quad d_5 = 44$$

4. La formule d'inversion de Pascal nous donne (pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a ici $a_k = d_k$ et $b_k = k!$) pour $p = n$:

$$\begin{aligned} d_n &= (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k! = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \\ &= (-1)^n n! \sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^{n-\ell}}{\ell!} \quad (\text{changement d'indice } \ell = n - k) \\ &= \underbrace{(-1)^{2n}}_{=1} n! \sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \end{aligned}$$

car, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a $(-1)^{-\ell} = (-1)^\ell$. Finalement :

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

5. (a) Une association de danseurs peut être assimilée à une permutation de $\llbracket 1, 5 \rrbracket$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \end{pmatrix}$$

où la première ligne correspond aux numéros des femmes (tels qu'attribués à leur arrivée) et $h_1, \dots, h_5$ les hommes donnant les 5 couples de danseurs. Donc :

$$\boxed{\text{le nombre d'associations possibles est } |S_5| = 120}$$

(b) Une association tel qu'aucun couple légitime ne soit reconstitué est un dérangement de $\llbracket 1, 5 \rrbracket$ donc :

$$\boxed{\text{la probabilité cherchée est } \frac{d_5}{120} = \frac{11}{30}}$$

(c) On commence par déterminer le nombre d'associations possibles avec un seul couple légitime. Pour obtenir une telle association :

★ on choisit le couple légitime : 5 choix ;

★ ensuite, il faut 4 couples illégitimes, ce qui revient à choisir un dérangement des 4 numéros restants : $|D_4| = 9$ choix.

L'ensemble évoqué est donc de cardinal 45. Ainsi :

$$\boxed{\text{la probabilité cherchée est } \frac{45}{120} = \frac{3}{8}}$$