

DEVOIR SURVEILLÉ 9

durée de l'épreuve : 2h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.
- Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet est composé de deux exercices indépendants.

Exercice 1 (déterminants circulants).

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Première partie

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ \lambda^3 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\det(A(\lambda)) = (1 - \lambda^4)^3$.
2. Déterminer le rang de la matrice $A(\lambda)$ en fonction du paramètre λ .
3. On considère la famille $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^4$ formé par les vecteurs :

$$e_1 = (1, 1, 1, 1), \quad e_2 = (1, i, -1, -i), \quad e_3 = (1, -1, 1, -1) \quad \text{et} \quad e_4 = (1, -i, -1, i)$$

- (a) Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}^4$.

On note f_λ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A(\lambda)$.

- (b) Déterminer la matrice $D(\lambda)$ de f_λ dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^4$. Quel résultat peut-on retrouver avec la matrice $D(\lambda)$?

Deuxième partie

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

On considère les matrices A et Ω de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par :

$$A = (a_{q-p[n]})_{1 \leq p, q \leq n} \quad \text{et} \quad \Omega = (\omega^{(p-1)(q-1)})_{1 \leq p, q \leq n}$$

Par exemple, pour $n = 5$, les matrices A et Ω sont définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \omega^{12} \\ 1 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^{12} & \omega^{16} \end{pmatrix}$$

Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$$

Le but de cette partie est de calculer le déterminant de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4. On note $\bar{\Omega}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\bar{\Omega} = (\omega^{-(p-1)(q-1)})_{1 \leq p, q \leq n}$$

Montrer que $\Omega \bar{\Omega} = nI_n$. En déduire que Ω est inversible et exprimer Ω^{-1} en fonction de $\bar{\Omega}$.

5. Montrer que :

$$\forall p, q \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (A\Omega)_{p,q} = P(\omega^{q-1})\omega^{(p-1)(q-1)},$$

où $(A\Omega)_{p,q}$ désigne le coefficient en ligne p et en colonne q de la matrice produit $A\Omega$.

6. En déduire l'égalité :

$$\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$$

7. En déduire une expression *factorisée* des déterminants suivants :

$$\alpha = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix},$$

où a, b, c et d sont des nombres complexes.

Exercice 2 (nombre de dérangements d'un ensemble).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition (dérangement)

★ On appelle *dérangement* de $\llbracket 1, n \rrbracket$ toute permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sans point fixe.

★ L'ensemble des dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est noté D_n .

Dans la suite, on note d_n le cardinal de D_n , i.e. $d_n = |D_n|$ et, par convention, on pose $d_0 = 1$.

Autrement dit :

$$\forall \sigma \in S_n, \quad \sigma \in D_n \iff (\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(k) \neq k)$$

1. Expliciter D_1 , D_2 et D_3 et donner les valeurs de d_1 , d_2 et d_3 .

L'objectif de cet exercice est de calculer, plus généralement, d_n .

2. Nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme (formule d'inversion de Pascal)

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose :

$$b_p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a_k$$

Alors :

$$\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_p = (-1)^p \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k b_k$$

- (a) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \forall \ell \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \binom{p}{k} \binom{k}{\ell} = \binom{p-\ell}{k-\ell} \binom{p}{\ell}$$

- (b) Démontrer le lemme.

3. (a) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On note X_k l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ admettant exactement k points fixes. Exprimer $|X_k|$ en fonction de l'un des nombres d_ℓ .
(b) En déduire que :

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$$

- (c) En déduire les valeurs de d_4 et d_5 .

4. En déduire que :

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

5. Cinq couples de danseurs se rendent à un bal. À l'arrivée, on sépare les hommes et les femmes ; on attribue à chaque femme et à chaque homme un numéro de 1 à 5. On les fait ensuite s'élancer sur une piste, chaque danseuse choisissant au hasard un danseur pour partenaire.

- (a) À chaque numéro de danseuse, on associe le numéro de l'homme avec lequel elle danse. Combien y a-t-il d'associations possibles ?
(b) Calculer la probabilité¹ pour qu'aucun couple légitime ne soit reconstitué.
(c) Calculer la probabilité pour qu'un seul couple légitime soit reconstitué.

– FIN DE L'ÉPREUVE –

1. La probabilité se calculant par le rapport « nombre de cas favorables/nombre de cas au total ».