

DEVOIR SURVEILLÉ 8

un corrigé

Exercice 1.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La famille \mathcal{F}_λ comporte trois vecteurs de \mathbb{R}^3 et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc :

$$\mathcal{F}_\lambda \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \iff \mathcal{F}_\lambda \text{ est libre}$$

Étudions donc la liberté de cette famille. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w_\lambda = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} &\iff \begin{cases} \alpha & + \lambda\gamma = 0 & \text{L}_1 \\ & \beta + 2\gamma = 0 & \text{L}_2 \\ -\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 & \text{L}_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha & + \lambda\gamma = 0 & \text{L}_1 \\ & \beta + 2\gamma = 0 & \text{L}_2 \\ & 2\beta + (3 + \lambda)\gamma = 0 & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_1 + \text{L}_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha & + \lambda\gamma = 0 & \text{L}_1 \\ & \beta + 2\gamma = 0 & \text{L}_2 \\ & (\lambda - 1)\gamma = 0 & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 - 2\text{L}_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

- ★ si $\lambda \neq 1$, alors le système triangulaire ci-dessus admet pour unique solution le triplet :

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$$

et la famille \mathcal{F}_λ est donc libre ;

- ★ si $\lambda = 1$, alors le triplet $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, -2, 1)$ est une solution non nulle du système donc la famille \mathcal{F}_1 est liée.

Ainsi :

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la famille \mathcal{F}_λ est une base de \mathbb{R}^3 si et seulement si $\lambda \neq 1$

2. On remarque que $w_1 = u + 2v$ donc $F = \text{Vect}(u, v)$. La famille (u, v) est donc génératrice de F et elle est libre constituée de deux vecteurs non colinéaires. Ainsi :

la famille (u, v) est une base de F et $\dim(F) = \text{Card}((u, v)) = 2$

3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \alpha u + \beta v \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha & = x \\ & \beta = y \\ -\alpha + 2\beta & = z \end{cases} \\ &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha & = x \\ & \beta = y \\ -x + 2y & = z \end{cases} \\ &\iff x - 2y + z = 0 \end{aligned}$$

Finalement :

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$ (donc les valeurs $a = 1$, $b = -2$ et $c = 1$ conviennent)

4. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in G &\iff x = -3y - 2z \iff (x, y, z) = (-3y - 2z, y, z) \\ &\iff (x, y, z) = y(-3, 1, 0) + z(-2, 0, 1) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{G = \text{Vect}((-3, 1, 0), (-2, 0, 1)) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$$

La famille $((-3, 1, 0), (-2, 0, 1))$ est génératrice de G et elle est libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires) donc :

$$\boxed{((-3, 1, 0), (-2, 0, 1)) \text{ est une base de } G \text{ et } \dim(G) = 2}$$

5. (a) On sait que $\dim(G) = 2$ et $\dim(D) = 1$ (une base de D est $((1, 2, -1))$ car cette famille est génératrice de D et elle est libre car composée d'un unique vecteur non nul). Ainsi :

$$\dim(G) + \dim(D) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Montrons maintenant que $G \cap D = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Soit $(x, y, z) \in G \cap D$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = \alpha t = (\alpha, 2\alpha, -\alpha)$ (car $(x, y, z) \in D$) et puisque $(x, y, z) \in G$, on a :

$$\alpha + 3(2\alpha) + 2(-\alpha) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha = 0$$

On a donc $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, d'où l'inclusion $G \cap D \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. L'inclusion réciproque étant claire (puisque $G \cap D$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3), on a bien $G \cap D = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Finalement :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = G \oplus D}$$

(b) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\begin{aligned} (0, 5, -5) &= \alpha(-3, 1, 0) + \beta(-2, 0, 1) + \gamma(1, 2, -1) \\ &\iff \begin{cases} -3\alpha - 2\beta + \gamma = 0 & \text{L}_1 \\ \alpha + 2\gamma = 5 & \text{L}_2 \\ \beta - \gamma = -5 & \text{L}_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -3\alpha - 2\beta + \gamma = 0 & \text{L}_1 \\ -2\beta + 7\gamma = 15 & \text{L}_2 \leftarrow 3\text{L}_2 + \text{L}_1 \\ \beta - \gamma = -5 & \text{L}_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -3\alpha - 2\beta + \gamma = 0 & \text{L}_1 \\ -2\beta + 7\gamma = 15 & \text{L}_2 \\ 5\gamma = 5 & \text{L}_3 \leftarrow 2\text{L}_3 + \text{L}_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -4 \\ \gamma = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{les vecteurs } g = 3(-3, 1, 0) - 4(-2, 0, 1) \in G \text{ et } d = (1, 2, -1) \in D \text{ sont tels que } s = g + d}$$

6. (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F \cap G &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 & \text{L}_1 \\ x + 3y + 2z = 0 & \text{L}_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 & \text{L}_1 \\ 5y + z = 0 & \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 - \text{L}_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 7y \\ z = -5y \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = y(7, 1, -5) \end{aligned}$$

Ainsi, $F \cap G = \text{Vect}((7, 1, -5))$. La famille $((7, 1, -5))$ est génératrice de $F \cap G$ et elle est libre car constituée d'un unique vecteur non nul. Par conséquent :

une base de $F \cap G$ est $((7, 1, -5))$

(b) On a $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc :

F et G ne sont pas en somme directe

(c) D'après la formule de Grassmann (qui s'applique car les espaces considérés sont de dimension finie) :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Or $F + G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et $\dim(F + G) = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc :

$$F + G = \mathbb{R}^3$$

Exercice 2.

1. On sait que la fonction sh est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ (elle l'est en fait¹ sur \mathbb{R}). D'après le théorème de la bijection, sh réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur :

$$\text{sh}(\mathbb{R}_+) = \left[\text{sh}(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) \right[= [0, +\infty[= \mathbb{R}$$

Comme $1 \in \mathbb{R}_+$, on conclut que :

l'équation $\text{sh}(x) = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet une unique solution (notée α)

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^\alpha (\text{sh}(t)^{n+1} - \text{sh}(t)^n) dt = \int_0^\alpha \text{sh}(t)^n (\text{sh}(t) - 1) dt$$

La fonction sh étant croissante sur $[0, \alpha]$ (elle l'est sur \mathbb{R}), on a :

$$\forall t \in [0, \alpha], \quad \text{sh}(0) \leq \text{sh}(t) \leq \text{sh}(\alpha) \quad \text{i.e.} \quad 0 \leq \text{sh}(t) \leq 1 \quad (\text{par définition de } \alpha)$$

On en déduit que :

$$\forall t \in [0, \alpha], \quad \text{sh}(t)^n (\text{sh}(t) - 1) \leq 0$$

Par positivité de l'intégrale (rappelons que $\alpha \geq 0$), il vient :

$$\int_0^\alpha \text{sh}(t)^n (\text{sh}(t) - 1) dt \leq 0 \quad \text{i.e.} \quad I_{n+1} \leq I_n$$

Par conséquent :

la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall t \in [0, \alpha], \quad \text{sh}(t)^n \geq 0$$

et donc $I_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0) donc, d'après le théorème de la limite monotone,

la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrale I_{n+2} se réécrit :

$$I_{n+2} = \int_0^\alpha \text{sh}(t)^{n+2} dt = \int_0^\alpha \text{sh}(t) \text{sh}(t)^{n+1} dt$$

On utilise une intégration par parties. En posant :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \text{sh}(t) & v(t) &= \text{sh}(t)^{n+1} \\ u(t) &= \text{ch}(t) & v'(t) &= (n+1) \text{ch}(t) \text{sh}(t)^n \end{aligned}$$

1. C'est du cours.

on a :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[\operatorname{ch}(t) \operatorname{sh}(t)^{n+1} \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha (n+1) \operatorname{ch}(t)^2 \operatorname{sh}(t)^n dt \\ &= \operatorname{ch}(\alpha) \underbrace{\operatorname{sh}(\alpha)^{n+1}}_{=1} - 0 - (n+1) \int_0^\alpha (1 + \operatorname{sh}(t)^2) \operatorname{sh}(t)^n dt \\ &= \operatorname{ch}(\alpha) - (n+1) \left(\int_0^\alpha \operatorname{sh}(t)^n dt + \int_0^\alpha \operatorname{sh}(t)^{n+2} dt \right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$I_{n+2} = \operatorname{ch}(\alpha) - (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

d'où l'on tire bien la relation annoncée en isolant I_{n+2} . Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)I_{n+2} = \operatorname{ch}(\alpha) - (n+1)I_n}$$

(d) On sait que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente ; notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. La relation obtenue à la question précédente nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+2} = \frac{\operatorname{ch}(\alpha)}{n+2} - \frac{n+1}{n+2}I_n = \frac{\operatorname{ch}(\alpha)}{n+2} - \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}I_n \quad (*)$$

On a :

$$I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell, \quad I_{n+2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell, \quad \frac{\operatorname{ch}(\alpha)}{n+2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

donc, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans $(*)$, il vient :

$$\ell = 0 - 1 \times \ell \quad \text{i.e.} \quad 2\ell = 0 \quad \text{soit encore} \quad \ell = 0$$

Finalement :

$$\boxed{I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$$

Exercice 3.

1. (a) On a $I_0 = \int_0^1 0 dt = 0$ et :

$$I_1 = \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

donc :

$$\boxed{I_0 = 0 \quad \text{et} \quad I_1 = \frac{2}{3}}$$

(b) On a $I_2 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$. En effectuant le changement de variable $t = \sin(x)$, il vient :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(x)} \cos(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(x)| \cos(x) dx$$

La fonction \cos est positive sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

i.e. :

$$\boxed{I_2 = \frac{\pi}{4}}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $1 = \int_0^1 1 dt$ donc, en utilisant la linéarité de l'intégrale, il vient :

$$\begin{aligned} 1 - \int_0^1 \frac{t^n}{1 + \sqrt{1-t^n}} dt &= \int_0^1 \left(1 - \frac{t^n}{1 + \sqrt{1-t^n}} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{t^n(1 - \sqrt{1-t^n})}{(1 + \sqrt{1-t^n})(1 - \sqrt{1-t^n})} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{t^n(1 - \sqrt{1-t^n})}{t^n} \right) dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-t^n} dt \\ &= I_n \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = 1 - \int_0^1 \frac{t^n}{1 + \sqrt{1-t^n}} dt}$$

(b) D'après la question 2.(a), il s'agit de montrer que $\int_0^1 \frac{t^n}{1 + \sqrt{1-t^n}} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (on note J_n cette intégrale). Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $1 + \sqrt{1-t^n} \geq 1$ donc, en utilisant la décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* et le fait que $t^n \geq 0$, on a :

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq \frac{t^n}{1 + \sqrt{1-t^n}} \leq t^n$$

La propriété de croissance de l'intégrale nous donne :

$$\int_0^1 0 dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1 + \sqrt{1-t^n}} dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

et on a $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Or $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc (théorème des gendarmes) $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Finalement :

$$\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est convergente de limite } 1}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable $u = t^n$ (i.e. $t = u^{\frac{1}{n}}$) fournit :

$$J_n = \int_0^1 \frac{u}{1 + \sqrt{1-u}} \times \frac{1}{n} \times u^{\frac{1}{n}-1} du = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1 + \sqrt{1-u}} du$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = 1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1 + \sqrt{1-u}} du}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat admis, on a :

$$\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1 + \sqrt{1-u}} du \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{1-u}} du}_{\text{notée } J} + o(1)$$

Le changement de variable $x = \sqrt{1-u}$ (i.e. $u = 1 - x^2$) dans l'intégrale J fournit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{1-u}} du &= \int_1^0 \frac{1}{1+x} \times (-2x) dx = 2 \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= 2 \left[x - \ln(1+x) \right]_0^1 \\ &= 2(1 - \ln(2)) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{n}(2(1 - \ln(2)) + o(1))$$

i.e. :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{2(1 - \ln(2))}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Problème (noyau et image supplémentaires).

Partie I : étude d'un exemple

1. Tout d'abord, g est clairement à valeurs dans \mathbb{R}^2 . De plus, pour tous $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g((x, y) + \lambda(a, b)) &= g((x + \lambda a, y + \lambda b)) = (0, x + \lambda a) = (0, x) + \lambda(0, a) \\ &= g((x, y)) + \lambda g((a, b)) \end{aligned}$$

donc g est linéaire. Ainsi :

$$g \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^2$$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \text{Ker}(g) &\iff g((x, y)) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff (0, x) = (0, 0) \iff x = 0 \\ &\iff (x, y) = (0, y) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\text{Ker}(g) = \{y(0, 1) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, 1))$$

Comme $((1, 0), (0, 1))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^2 , on sait que :

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}(g((1, 0)), g((0, 1))) = \text{Vect}((0, 1), 0_{\mathbb{R}^2}) = \text{Vect}((0, 1))$$

et donc :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((0, 1))$$

3. On a $\text{Ker}(g) = \text{Im}(g) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ donc $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(g) = \text{Ker}(g) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Autrement dit, le noyau et l'image de g ne sont pas en somme directe donc ils ne sont pas supplémentaires dans \mathbb{R}^2 . On en déduit que :

$$g \text{ ne vérifie pas la propriété } (\mathcal{P})$$

Partie II : être un projecteur, une condition suffisante

4. On procède par double inclusion.

★ Comme $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont des sous-espaces vectoriels de E , on a l'inclusion $\{0_E\} \subset \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$.

★ Soit $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$. Alors $p(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ (car $x \in \text{Im}(p)$). Or $p \circ p = p$ donc :

$$0_E = p(x) = p(p(y)) = (p \circ p)(y) = p(y) = x$$

Ainsi, $x = 0_E$ et donc $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) \subset \{0_E\}$.

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\}}$$

5. Si E est de dimension finie alors, comme $p \in \mathcal{L}(E)$, la formule du rang nous donne :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(p)) + \dim(\text{Im}(p))$$

Comme on sait aussi que $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\}$, on peut conclure que :

$$\boxed{E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)}$$

6. Sachant que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont en somme directe (question 4.), il reste à montrer l'égalité :

$$E = \text{Ker}(p) + \text{Im}(p)$$

L'inclusion $\text{Ker}(p) + \text{Im}(p) \subset E$ est évidente car E est un espace vectoriel. Il reste donc à démontrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in E$. Alors :

$$x = (x - p(x)) + p(x)$$

Par définition de $\text{Im}(p)$, on a $p(x) \in \text{Im}(p)$. De plus, $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$ car $p^2 = p$ et p est linéaire donc :

$$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0_E$$

Ainsi, $x \in \text{Ker}(p) + \text{Im}(p)$. D'où la deuxième inclusion $E \subset \text{Ker}(p) + \text{Im}(p)$. Finalement, on a bien l'égalité annoncée. On peut donc conclure que :

$$\boxed{E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)}$$

Partie III : une condition nécessaire et suffisante en dimension finie

7. (a) ★ Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$ puis, par linéarité de f ,

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$$

donc $x \in \text{Ker}(f^2)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)}$$

★ Soit $x \in \text{Im}(f^2)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = f^2(y)$. Ainsi :

$$x = f(f(y)) \quad \text{et} \quad f(y) \in E$$

donc, par définition de l'image de f , on a $x \in \text{Im}(f)$. D'où l'inclusion :

$$\boxed{\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)}$$

(b) L'espace vectoriel E est de dimension finie et $f, f^2 \in \mathcal{L}(E)$ donc, d'après la formule du rang,

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f^2)) + \dim(\text{Im}(f^2))$$

Ainsi, si (\mathcal{Q}) est vraie, alors $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(f^2))$ et l'égalité précédente entraîne que $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Im}(f^2))$. Or on sait que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ donc (puisque les espaces considérés sont de dimensions finies), on a l'égalité $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$, ce qui signifie que (\mathcal{R}) est vraie. L'implication $(\mathcal{R}) \implies (\mathcal{Q})$ se traite exactement de la même manière. Ainsi :

$$\boxed{\text{les propriétés } (\mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{R}) \text{ sont équivalentes}}$$

8. Supposons que (\mathcal{Q}) soit vraie.

★ On sait déjà que $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$.

★ Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. On a alors $f(f(y)) = 0_E$, c'est-à-dire $f^2(y) = 0_E$. Ainsi, $y \in \text{Ker}(f^2)$, ce qui signifie que $y \in \text{Ker}(f)$ (par hypothèse). On a donc $x = f(y) = 0_E$. Ceci prouve l'inclusion $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \subset \{0_E\}$. Comme l'inclusion réciproque est évidente, on a l'égalité $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

Finalement, $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$. On a donc démontré que :

$$\boxed{(\mathcal{Q}) \implies (\mathcal{P})}$$

9. Supposons que (\mathcal{P}) soit vraie.

- ★ On sait déjà que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ (question 7.(a)).
- ★ Soit $x \in \text{Ker}(f^2)$. On a $f(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \text{Ker}(f)$. Par ailleurs, $f(x) \in \text{Im}(f)$ donc $f(x) = 0_E$ (en effet, (\mathcal{P}) étant supposée vraie, on a $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$). Autrement dit, $x \in \text{Ker}(f)$, ce qui démontre que $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$.

La propriété (\mathcal{Q}) est donc vraie. Finalement :

$$\boxed{(\mathcal{P}) \implies (\mathcal{Q})}$$