

DEVOIR SURVEILLÉ 8

un corrigé

Exercice 1.

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On montre facilement que $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.
- La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminons le noyau de f . Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(f) &\iff f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 & L_1 \\ x + y = 0 & L_2 \\ y + z = 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \dots \\ &\iff (x, y, z) = (z, -z, z) = z(1, -1, 1) \\ &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((1, -1, 1)) \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, -1, 1))$. La famille $((1, -1, 1))$ est génératrice de $\text{Ker}(f)$ et elle est libre car constituée d'un unique vecteur non nul. Donc :

$$\text{une base de } \text{Ker}(f) \text{ est } ((1, -1, 1))$$

Déterminons l'image de f . On a :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) = \text{Vect}((1, 1, 0), (3, 1, 1), (2, 0, 1)) \\ &= \text{Vect}((1, 1, 0), (2, 0, 1)) \end{aligned}$$

car $(3, 1, 1) = (1, 1, 0) + (2, 0, 1)$. Une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ est $((1, 1, 0), (2, 0, 1))$ et elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. Donc :

$$\text{une base de } \text{Im}(f) \text{ est } ((1, 1, 0), (2, 0, 1))$$

Comme $\text{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$,

$$\text{l'application } f \text{ n'est pas injective (elle n'est donc pas bijective non plus)}$$

De plus, $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ (car la dimension de l'image est égale à $2 \neq 3$) donc :

$$f \text{ n'est pas surjective}$$

- On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit l'expression analytique de f^2 . Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 8y + 4z \\ 2x + 4y + 2z \\ x + 2y + z \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f^2(x, y, z) = (4x + 8y + 4z, 2x + 4y + 2z, x + 2y + z)$$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a aussi $f(x, y, z) = (x + 2y + z)(4, 2, 1)$ donc $\text{Im}(f^2) = \text{Vect}((4, 2, 1))$. Une base de $\text{Im}(f^2)$ est $((4, 2, 1))$ (car celle-ci est génératrice de l'image de f^2 et libre car constituée d'un unique vecteur non nul). On a donc :

$$\text{rg}(f^2) = \dim(\text{Im}(f^2)) = 1$$

Comme $\text{rg}(f^2) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$, on peut conclure que :

l'application f n'est ni injective, ni surjective (ni bijective)

5. On montrer que la famille proposée est libre. Cette famille est de plus constituée de 3 vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc :

$\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

De plus, $f(u) = (0, 0, 0)$, $f(v) = (-1, 1, -1) = -u$ et $f(w) = (12, 6, 3) = 3w$ donc :

la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et celle de f^2 est $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (calcul d'un projecteur).

1. Tout d'abord, il est clair que $H \subset E$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} M \in H &\iff a + d = 0 \iff d = -a \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ &\iff M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$H = \{a(E_{1,1} - E_{2,2}) + bE_{1,2} + cE_{2,1} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$$

donc :

H est un sous-espace vectoriel de E

Une famille génératrice de H est $(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$. Cette famille est de plus libre car, pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a (en remontant les calculs précédentes) :

$$a(E_{1,1} - E_{2,2}) + bE_{1,2} + cE_{2,1} = 0_2 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = b = c = 0$$

Ainsi :

la famille $(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ est une base de H donc $\dim(H) = 3 = \dim(E) - 1$; on en déduit que H est un hyperplan de E

2. Montrons que $E = F \oplus H$.

★ On sait que $\dim(F) = 1$ et que $\dim(H) = 3$ donc :

$$\dim(F) + \dim(H) = 4 = \dim(E)$$

★ Il reste à montrer que $F \cap H = \{0_2\}$. Comme F et H sont des sous-espaces vectoriels de E , on a $\{0_2\} \subset F \cap H$. Soit $M \in F \cap H$. Comme $M \in F$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M = aE_{1,1} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or $M \in H$ donc $a + 0 = 0$, i.e. $a = 0$. Ainsi, $M = 0_2$, ce qui prouve l'inclusion $F \cap H \subset \{0_2\}$. Par double inclusion, on a bien $F \cap H = \{0_2\}$.

Finalement :

les sous-espaces vectoriels F et H de E sont supplémentaires dans E

3. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$. On a :

$$\begin{aligned} M &= (a + d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(a + d)E_{1,1}}_{\in F} + \underbrace{(-d(E_{1,1} - E_{2,2}) + bE_{1,2} + cE_{2,1})}_{\in H} \end{aligned}$$

Par définition d'un projecteur, on a :

$$\begin{aligned} p_F(M) &= (a + d)E_{1,1} = \begin{pmatrix} a + d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p_H(M) = -d(E_{1,1} - E_{2,2}) + bE_{1,2} + cE_{2,1} \\ &= \begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$p_F : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a + d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad p_H : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

(b) Soit $M \in E$. Alors $p_H(M) \in H$. Or $H = \text{Ker}(p_F)$ (propriété sur les projecteurs) donc $p_F(p_H(M)) = 0_2$. Ainsi :

$$p_F \circ p_H = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

(c) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose $p_{\alpha, \beta} = \alpha p_F + \beta p_H$.

★ Tout d'abord, $p_{\alpha, \beta}$ est un endomorphisme de E (comme combinaison linéaire d'endomorphismes de E).

★ Ainsi, $p_{\alpha, \beta}$ est un projecteur de E si et seulement si $p_{\alpha, \beta}^2 = p_{\alpha, \beta}$. Or :

$$p_{\alpha, \beta}^2 = (\alpha p_F + \beta p_H)^2 = \alpha^2 p_F^2 + \alpha \beta p_F \circ p_H + \alpha \beta p_H \circ p_F + \beta^2 p_H^2$$

Comme p_F et p_H sont des projecteurs de E , on a $p_F^2 = p_F$ et $p_H^2 = p_H$. Par ailleurs, on sait que $p_F \circ p_H = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et, de la même manière, on a $p_H \circ p_F = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ainsi :

$$p_{\alpha, \beta}^2 = \alpha^2 p_F + \beta^2 p_H$$

donc :

$$p_{\alpha, \beta}^2 = p_{\alpha, \beta} \iff (\alpha^2 - \alpha)p_F + (\beta^2 - \beta)p_H = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad (*)$$

Supposons que l'égalité $(*)$ soit vérifiée. En choisissant x quelconque dans $F \setminus \{0_E\}$ (un tel vecteur existe car F n'est pas l'espace nul), on obtient (puisque $p_H(x) = 0_E$) l'égalité $(\alpha^2 - \alpha)x = 0_E$ et donc $\alpha^2 - \alpha = 0$ (puisque $x \neq 0_E$). On en déduit que $\alpha \in \{0, 1\}$. En choisissant cette fois x non nul dans H , on obtient $\beta \in \{0, 1\}$. Réciproquement, si α et β sont égaux à 0 ou à 1, alors $(*)$ est vraie. Finalement :

$$p_{\alpha, \beta} \text{ est un projecteur de } E \text{ si et seulement si } (\alpha, \beta) \in \{0, 1\}^2$$

Remarque : les projecteurs de E correspondant sont $0_{\mathcal{L}(E)}$, p_F , p_H et $p_F + p_H = \text{Id}_E$.

Exercice 3.

Soit $x \in [0, 1[$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Comme $x < 1$, cette fonction est en particulier continue sur le segment $[0, x]$. Ainsi :

$$\text{l'intégrale } K_n(x) \text{ est bien définie}$$

2. Pour tout $t \in [0, x]$, on a $1-t > 0$ car $1-t \geq 1-x > 0$ (puisque $x < 1$). Ainsi :

$$K_0(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \left[-\ln(\underbrace{1-t}_{>0}) \right]_0^x = -\ln(1-x)$$

et :

$$\begin{aligned} K_1(x) &= \int_0^x \frac{x-t}{(1-t)^2} dt = \int_0^x \frac{(x-1) + (1-t)}{(1-t)^2} dt = \int_0^x \left(\frac{x-1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= \left[\frac{x-1}{1-t} - \ln(1-t) \right]_0^x \\ &= -1 - \ln(1-x) - x + 1, \end{aligned}$$

i.e. :

$$K_0(x) = -\ln(1-x) \quad \text{et} \quad K_1(x) = -x - \ln(1-x)$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{1}{(1-t)^{n+1}} = (1-t)^{-n-1} & v(t) &= (x-t)^n \\ u(t) &= \frac{1}{n(1-t)^n} & v'(t) &= -n(x-t)^{n-1} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, x]$ donc on peut intégrer par parties et on a :

$$K_n(x) = \left[\frac{(x-t)^n}{n(1-t)^n} \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^n} dt = -\frac{x^n}{n} + K_{n-1}(x)$$

On a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K_n(x) = K_{n-1}(x) - \frac{x^n}{n}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad K_k(x) - K_{k-1}(x) = -\frac{x^k}{k}$$

En sommant ces égalités, il vient :

$$\sum_{k=1}^n (K_k(x) - K_{k-1}(x)) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \quad i.e. \quad K_n(x) - K_0(x) = -S_n(x)$$

car la somme de gauche est télescopique. Or on sait que $K_0(x) = -\ln(1-x)$ (d'après la question 2.) donc on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(x) = -\ln(1-x) - K_n(x)}$$

5. Pour tout $t \in [0, x]$, on a :

$$x - \frac{x-t}{1-t} = \frac{x(1-t) - (x-t)}{1-t} = \frac{t(1-x)}{1-t} \geq 0$$

car $t \geq 0$, $1-x \geq 0$ et $1-t \geq 0$, donc :

$$\boxed{\forall t \in [0, x], \quad \frac{x-t}{1-t} \leq x}$$

Soit $t \in [0, x]$. On a :

$$\frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} = \frac{1}{1-t} \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n$$

donc, par croissance de la fonction $u \mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$0 \leq \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n \leq x^n \quad (*)$$

De plus $1-t \geq 1-x$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$,

$$0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x} \quad (**)$$

En multipliant membre à membre les inégalités (*) et (**), on obtient :

$$\forall t \in [0, x], \quad 0 \leq \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \leq \frac{x^n}{1-x}$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont *dans le bon sens* : $0 \leq x$), on obtient :

$$0 \leq K_n(x) \leq \int_0^x \frac{x^n}{1-t} dt = \frac{x^n}{1-x} \int_0^x 1 dt$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq K_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{1-x}}$$

6. Comme $x \in [0, 1[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$$

La question 5. et le théorème des gendarmes entraînent donc que la suite $(K_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. La question 4. nous permet alors de conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (S_n(x))_{n \geq 1} \text{ est convergente de limite } -\ln(1-x)}$$

7. On a $x = \frac{1}{2} \in [0, 1[$. On sait que la suite $\left(S_n \left(\frac{1}{2} \right) \right)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $-\ln \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \ln(2)$. On propose la fonction suivante¹ :

```
from math import log

def approximation() :
    s = 0
    n = 0
    while (abs(s-log(2)) > 10**(-8)) :
        n = n + 1
        s = s + 1/(n*2**n)
    return n
```

Remarque : à l'aide de l'outil informatique, on obtient $n = 22$.

1. La fonction valeur absolue **abs** est disponible par défaut.

Problème (d'après Concours Commun des Écoles des Mines 2009).

I – Étude de deux applications

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Tout d'abord, une composée de polynômes est un polynôme et une combinaison linéaire de polynômes est un polynôme donc $f(P) \in \mathbb{R}[X]$. De plus, on sait que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X] \setminus \mathbb{R}_0[X], \quad \deg(P \circ Q) = \deg(P) \deg(Q)$$

En particulier, comme $\frac{X}{2}$ et $\frac{X+1}{2}$ sont de degré 1, on a :

$$\deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right) = \deg\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) = \deg(P)$$

Ainsi (en utilisant encore les propriétés sur le degré) :

$$\begin{aligned} \deg(f(P)) &= \deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \leq \max\left[\deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right), \deg\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)\right] \\ &= \max(\deg(P), \deg(P)) \\ &= \deg(P) \\ &\leq 2 \quad (\text{puisque } P \in \mathbb{R}_2[X]) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ et donc :

$f \text{ est bien à valeurs dans } \mathbb{R}_2[X]$

Remarque : on peut aussi expliciter le polynôme (il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = a + bX + cX^2$) et calculer $f(P)$. On constate alors que P est de degré inférieur ou égal à 2 (on obtient effectivement une combinaison linéaire de $1 = X^0$, X et X^2), ce qui répond à la question.

Montrons maintenant que f est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= \frac{1}{2} \left[(P + \lambda Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (P + \lambda Q)\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + \lambda Q\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) + \lambda Q\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] \quad (\text{par définition de } P + \lambda Q) \\ &= \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] + \lambda \times \frac{1}{2} \left[Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] \\ &= f(P) + \lambda f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi :

$f \text{ est linéaire (on a donc } f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X]))$

2. Tout d'abord, φ est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(1) = P(1) + \lambda Q(1) \quad (\text{par définition de } P + \lambda Q) \\ &= \varphi(P) + \lambda \varphi(Q) \end{aligned}$$

donc φ est linéaire. Finalement :

$\varphi \text{ est une forme linéaire sur } \mathbb{R}_2[X]$

3. On a $f(1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$ puis :

$$\begin{aligned} f(X) &= \frac{1}{2} \left(\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2} \right) = \frac{X}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f(X^2) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{X}{2} \right)^2 + \left(\frac{X+1}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{X^2}{4} + \frac{X^2}{4} + \frac{X}{2} + \frac{1}{4} \right] \\ &= \frac{X^2}{4} + \frac{X}{4} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Donc :

$\text{la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B}, \text{ notée } N, \text{ est } N = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

4. La matrice N est inversible (en effet, celle-ci est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls) donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Ainsi :

f est injective et surjective

5. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = a + bX + cX^2$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\varphi) &\iff P(1) = 0 \iff a + b + c = 0 \iff a = -b - c \\ &\iff P = -b - c + bX + cX^2 \\ &\iff P = b(X - 1) + c(X^2 - 1) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\text{Ker}(\varphi) = \{b(X - 1) + c(X^2 - 1) \mid b, c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X - 1, X^2 - 1)$$

La famille $(X - 1, X^2 - 1)$ est génératrice de $\text{Ker}(\varphi)$ et elle est libre car constituée de deux polynômes de degrés différents. Ainsi :

une base de $\text{Ker}(\varphi)$ est $(X - 1, X^2 - 1)$ et $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2$

Remarque : la dimension obtenue est en fait immédiate car φ est une forme linéaire *non nulle* (par exemple car $\varphi(1) = 1 \neq 0$) ; son noyau est donc un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$.

6. D'après le théorème du rang (qui s'applique car $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie), on a :

$$\dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\text{Ker}(\varphi)) = 3 - 2 = 1 = \dim(\mathbb{R})$$

Or $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. Autrement dit, φ est surjective. Par ailleurs, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2 > 0$ donc φ n'est pas injective. Finalement :

φ est surjective et n'est pas injective

II – Calcul des puissances successives d'une matrice

7. La famille $\mathcal{B}'$ est composée de trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ de degrés deux à deux distincts donc $\mathcal{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme de plus $\text{Card}(\mathcal{B}') = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, on peut conclure que :

$\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

8. La matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

9. Tout d'abord :

la matrice Q est inversible car elle est une matrice de passage

On sait que Q^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. Or :

$$X = -\frac{1}{2}(-2X + 1) + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad X^2 = \frac{1}{6}(6X^2 - 6X + 1) - \frac{1}{2}(-2X + 1) + \frac{1}{3}$$

donc :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Remarque : on peut aussi répondre à cette question *à la main*. « Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On résout l'équation $Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Etc. »

10. D'après les formules de changement de base, on a :

$$M = Q^{-1}NQ = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

i.e. :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

11. On démontre la relation à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

- ★ On a $A^0 = I_3$ et $QM^0Q^{-1} = QI_3Q^{-1} = QQ^{-1} = I_3$ donc l'égalité est vérifiée au rang 0.
- ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = QM^nQ^{-1}$. D'après les formules de changement de base, on a $M = Q^{-1}AQ$ donc (en multipliant à gauche par Q et à droite par Q^{-1}) on a aussi $QM^0Q^{-1} = A$. Ainsi (en utilisant l'associativité du produit matriciel) :

$$A^{n+1} = A^n A = QM^nQ^{-1}QM^0Q^{-1} = QM^nI_3MQ^{-1} = QM^{n+1}Q$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = QM^nQ^{-1}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la matrice M est diagonale, on a $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$. En développant le produit matriciel QM^nQ^{-1} ,

il vient :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}}$$

12. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P = a + bX + cX^2$. Comme A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, la matrice des coordonnées de $f^n(P)$ dans la base canonique est :

$$\begin{aligned} A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^n}\right)c \\ \frac{b}{2^n} + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right)c \\ \frac{c}{4^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{f^n(P) = a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^n}\right)c + \left(\frac{b}{2^n} + \frac{c}{2^n} - \frac{c}{4^n}\right)X + \frac{c}{4^n}X^2}$$

13. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = a + bX + cX^2$. D'après la question précédente, on a pour tout entier naturel n :

$$\varphi(f^n(P)) = f^n(P)(1) = a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^n}\right)c + \left(\frac{b}{2^n} + \frac{c}{2^n} - \frac{c}{4^n}\right) + \frac{c}{4^n}$$

donc $\varphi(f^n(P)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$. Or :

$$\int_0^1 P(t) dt = \int_0^1 (a + bt + ct^2) dt = \left[at + b\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$$

donc on a bien :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt}$$

III – Une autre preuve du résultat précédent

14. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On utilise un raisonnement par récurrence.

- ★ On a :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 P\left(\frac{X+k}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right) = f(P)$$

donc l'égalité est vraie pour $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$. En utilisant la linéarité de f et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
 f^{n+1}(P) &= f(f^n(P)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{\frac{X}{2} + k}{2^n}\right) + P\left(\frac{\frac{X+1}{2} + k}{2^n}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right) \right) \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ pair}}}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+\ell}{2^{n+1}}\right) + \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ impair}}}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+\ell}{2^{n+1}}\right) \right) \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\ell=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+\ell}{2^{n+1}}\right)
 \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)}$$

15. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Par définition de φ et d'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(f^n(P)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=1}^{2^n} P\left(\frac{\ell}{2^n}\right)$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, posons $u_m = \frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^m P\left(\frac{\ell}{m}\right)$. La suite $(u_m)_{m \geq 1}$ est une suite de sommes de Riemann de la fonction $t \mapsto P(t)$ qui est continue sur $[0, 1]$ (car polynomiale). Cette suite converge donc de limite $\int_0^1 P(t) dt$. Or $(\varphi^n(P))_{n \geq 1}$ est une suite extraite de $(u_m)_{m \geq 1}$, donc cette suite converge également vers $\int_0^1 P(t) dt$. Ainsi :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt}$$