

# DEVOIR SURVEILLÉ 8

*durée de l'épreuve : 4h*

- La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.
- Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème indépendants.

## Exercice 1.

On considère l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \\ (x, y, z) & \longmapsto (x + 3y + 2z, x + y, y + z) \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de  $f$ . L'application  $f$  est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. Déterminer l'application  $f^2 = f \circ f$ . En déduire le rang de  $f^2$ . Que peut-on en déduire sur l'application  $f^2$  ?
5. On considère les vecteurs  $u = (1, -1, 1)$ ,  $v = (1, 0, -1)$  et  $w = (4, 2, 1)$ . Montrer que  $(u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer la matrice de  $f$  dans cette base, puis celle de  $f \circ f$ .

## Exercice 2 (calcul d'un projecteur).

Dans cet exercice,  $E$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  des matrices carrées de taille  $2 \times 2$  à coefficients réels. On pose :

$$F = \text{Vect}(E_{1,1}) \quad \text{et} \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } a + d = 0 \right\},$$

$$\text{où } E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par définition,  $F$  est une droite vectorielle de  $E$  dont une base est  $(E_{1,1})$ .

1. Montrer que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et justifier qu'il s'agit d'un hyperplan de  $E$ . Déterminer également une base de  $H$ .
2. Montrer que  $F$  et  $H$  sont supplémentaires dans  $E$ .
3. (a) Déterminer l'expression analytique du projecteur  $p_F$  sur  $F$  parallèlement à  $H$ , puis celle du projecteur  $p_H$  sur  $H$  parallèlement à  $F$ .  
(b) Que vaut  $p_F \circ p_H$  ? Justifier.  
(c) Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur  $\alpha$  et  $\beta$  pour que  $\alpha p_F + \beta p_H$  soit un projecteur de  $E$ .

## Exercice 3.

Soit  $x \in [0, 1[$ . L'objectif de cet exercice est de montrer que la suite  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \right)_{n \geq 1}$  est convergente et de calculer sa limite.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$K_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$$

1. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , l'intégrale  $K_n(x)$  est bien définie.
2. Calculer  $K_0(x)$  et  $K_1(x)$ .
3. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K_n(x) = K_{n-1}(x) - \frac{x^n}{n}$$

4. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $S_n(x) = -\ln(1-x) - K_n(x)$ .
5. Après avoir obtenu une majoration de la fonction  $t \mapsto \frac{x-t}{1-t}$  sur  $[0, x]$ , montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq K_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

6. Conclure que la suite  $(S_n(x))_{n \geq 1}$  est convergente et déterminer sa limite.
7. Écrire un programme Python qui renvoie la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle la somme  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$  approche sa limite à  $10^{-8}$  près.

## Problème.

### I – Étude de deux applications

On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_2[X]$  des polynômes à coefficients réels de degré inférieurs ou égaux à 2. On note  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ . On définit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto \frac{1}{2} \left[ P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] \end{cases}$$

et :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \longmapsto P(1) \end{cases}$$

On rappelle aussi que l'on pose  $f^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^n = f \circ f^{n-1}$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Montrer que  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R})$ .
3. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
4. L'application  $f$  est-elle injective ? surjective ? Justifier.
5. Déterminer une base de  $\text{Ker}(\varphi)$  et sa dimension.
6. L'application  $\varphi$  est-elle injective ? surjective ? Justifier.

### II – Calcul des puissances successives d'une matrice

On note  $I_3$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note  $\mathcal{B}'$  la famille de  $\mathbb{R}_2[X]$  définie par :

$$\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1)$$

7. Justifier que la famille  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
8. Écrire la matrice de passage  $Q$  de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{B}'$ .
9. Justifier que  $Q$  est inversible et calculer son inverse.
10. Écrire la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
11. Calculer  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ . *On explicitera les neufs coefficients de  $A^n$ .*
12. Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $P = a + bX + cX^2$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , déterminer  $f^n(P)$  en fonction de  $a, b, c$ .
13. En déduire que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt$$

### III – Une autre preuve du résultat précédent

14. Démontrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$$

15. Retrouver alors le fait que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) \, dt$$

– FIN DE L'ÉPREUVE –