Devoir Surveillé 8

durée de l'épreuve : 4h

- *La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.*
- $\boxed{\textit{Les résultats non encadrés à la } \textbf{règle} \textit{ ne seront pas pris en compte dans la notation.}}$
- *La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le sujet comporte trois pages et est composé de trois exercices et d'un problème, tous indépendants les uns des autres.

Exercice 1.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs suivants :

$$u = (1, 0, -1), \qquad v = (0, 1, 2) \qquad \text{et} \qquad w_\lambda = (\lambda, 2, 3),$$

où λ est un nombre réel.

1. Montrer que la famille :
$$\mathscr{F}_\lambda = (u, v, w_\lambda)$$
est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on se place exclusivement dans le cas où $\lambda = 1$ *et on pose* :

$$F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}_1) = \mathrm{Vect}(u, v, w_1)$$

2. Déterminer une base et la dimension de F.
3. Démontrer qu'il existe des nombres réels a, b et c que l'on déterminera tels que :
$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax + by + cz = 0\right\}$$

On considère encore les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ *ci-dessous* :

- $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 3y + 2z = 0\right\}$;
- D est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dirigée par le vecteur $t = (1, 2, -1)$.

4. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de G et sa dimension.
5. (a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = G \oplus D$.
   (b) Soit $s = (0, 5, -5) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le couple de vecteurs $(g, d) \in G \times D$ tel que $s = g + d$.
6. (a) Déterminer une base de $F \cap G$. Quelle est sa dimension ?
   (b) Les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ sont-ils en somme directe ?
   (c) Déterminer la dimension de $F + G$ et justifier que $\mathbb{R}^3 = F + G$.

Exercice 2.

On rappelle que les fonctions ch et sh (*cosinus et sinus hyperboliques*) sont les fonctions :

$$\mathrm{ch} : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh} : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

et que celles-ci vérifient la relation fondamentale suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$$

1. Montrer que l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet une unique solution.
   Dans la suite, on notera $\alpha \in \mathbb{R}_+$ cette unique solution.
2. Pour tout entier naturel n, on pose :
   $$I_n = \int_0^{\alpha} \mathrm{sh}(t)^n \, \mathrm{d}t$$
   (a) Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. *On ne cherchera pas à calculer sa limite ici.*
   (c) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)I_{n+2} = \mathrm{ch}(\alpha) - (n+1)I_n$$
   (d) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3.

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^n} \, \mathrm{d}t$.

1. (a) Calculer les intégrales I_0 et I_1.
   (b) Calculer l'intégrale I_2 à l'aide du changement de variable $t = \sin(x)$.
2. (a) Justifier que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = 1 - \int_0^1 \frac{t^n}{1+\sqrt{1-t^n}} \, \mathrm{d}t$$
   (b) En déduire que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
3. À l'aide du changement de variable $u = t^n$, établir que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = 1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{1-u}} \, \mathrm{d}u$$
4. *On admet que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{1-u}} \, \mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{1-u}} \, \mathrm{d}u$.
   En posant finalement $x = \sqrt{1-u}$, conclure que :
   $$I_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{2(1-\ln(2))}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Problème (noyau et image supplémentaires).

Étant donnés un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un endomorphisme f de E, on dira que f vérifie la propriété $(\mathscr{P})$ si son noyau et son image sont supplémentaires dans E, *i.e.* si :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \tag{$\mathscr{P}$}$$

On se demande dans ce problème si tout endomorphisme de E vérifie la propriété $(\mathscr{P})$ et, si ce n'est pas le cas, nous allons chercher des conditions pour qu'un endomorphisme de E vérifie cette propriété.

Partie I : étude d'un exemple

On considère l'application g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad g\big((x,y)\big) = (0,x)$$

1. Vérifier que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer le noyau et l'image de g.
3. L'application g vérifie-t-elle la propriété $(\mathscr{P})$?

Partie II : être un projecteur, une condition suffisante

On se donne ici un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et p un projecteur de E, *i.e.* un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.

4. Démontrer que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_E\}$.
5. Si l'espace vectoriel E est de dimension finie, pourquoi peut-on conclure que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$?
6. Démontrer que, même si E n'est pas de dimension finie, on a l'égalité $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

Nous venons donc de démontrer que tout projecteur vérifie la propriété $(\mathscr{P})$.

Partie III : une condition nécessaire et suffisante en dimension finie

Dans cette dernière partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** et on se donne un endomorphisme f de E. On souhaite démontrer que les trois propriétés $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ suivantes sont équivalentes entre elles :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \tag{$\mathscr{P}$}$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \tag{$\mathscr{Q}$}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \tag{$\mathscr{R}$}$$

On rappelle que $f^2 = f \circ f$.

7. (a) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
   (b) En déduire que les propriétés $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ sont équivalentes.
8. Démontrer que si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, alors $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
9. Réciproquement, démontrer que si $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Nous venons de démontrer l'équivalence entre les trois propriétés.

– FIN DE L'ÉPREUVE –