

DEVOIR SURVEILLÉ 7

durée de l'épreuve : 4h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.
- Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet est composé de trois exercices et de deux problèmes indépendants.

Exercice 1.

Les questions 1. à 4. de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

- (a) Rappeler le $DL_2(0)$ de la fonction $t \mapsto (1+t)^{-\frac{1}{2}}$.
 - (b) Déterminer le $DL_5(0)$ de la fonction Arccos .
- Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\text{ch}(x)}$.
- Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ des suites de termes généraux suivants :
 - (a) $u_n = \frac{\sqrt{n} + n^2 + 3}{e^n + e^{-n} + 1}$;
 - (b) $v_n = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}{\tan\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}$;
 - (c) $w_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2}$;
 - (d) $x_n = n^3 \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) \right)$.
- Déterminer la limite $\ell = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$.

Exercice 2.

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = x - 2t = 0\}$$

et :

$$G = \{(a - 2b, a, a + 2b, a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et préciser leur dimension.
2. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 3.

Soit $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On considère l'ensemble F des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y'' = (1 + x^2)y \quad (\mathcal{E})$$

Autrement dit :

$$F = \left\{ y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) = (1 + x^2)y(x) \right\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Montrer que f et g appartiennent à F .

3. Montrer que si u et v sont des éléments de F , alors la fonction $u'v - uv'$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $h \in F$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $h = \alpha f + \beta g$.

On pourra calculer la dérivée de la fonction $\frac{h}{f}$.

5. Montrer que $F = \text{Vect}(f, g)$.
6. En déduire la dimension de F .

Problème 1 (série harmonique alternée).

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

L'objectif de ce problème est d'obtenir des informations sur la suite $(A_n)_{n \geq 1}$. Plus précisément, nous allons calculer la limite de cette suite puis nous en déterminerons un développement asymptotique à deux termes.

On introduit la suite d'intégrales $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

Première partie : étude de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Calculer les intégrales I_0 , I_1 et I_2 .
2. (a) Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(b) Justifier que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Quelle est la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

4. Montrer que :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

Deuxième partie : étude de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$

5. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$$

- (b) Conclure quant à la limite de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$.

Dans la suite du problème, on veut préciser cette convergence en calculant un développement asymptotique de la suite.

6. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx$.

7. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+2}$$

8. Conclure que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(2) + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Problème 2 (étude d'une fonction définie par une intégrale).

On considère les intervalles $I =]0, 1[$ et $J =]1, +\infty[$. Pour tout $x \in I \cup J$, on pose :

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$$

La fonction f est continue sur chacun des deux intervalles I et J donc elle y admet des primitives. On notera F une primitive de f .

1. (a) Déterminer le signe de Φ sur chacun des deux intervalles I et J .
(b) Justifier que Φ est dérivable sur $I \cup J$ et que :

$$\forall x \in I \cup J, \quad \Phi'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

En déduire les variations de Φ sur I et J .

2. Pour tout $x \in I \cup J$, on pose $\Psi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$. On admet que cette intégrale est bien définie.

- (a) Montrer que :

$$\forall x \in I \cup J, \quad \Psi(x) = \ln(2)$$

- (b) Démontrer que :

$$\forall x \in J, \quad \frac{\Phi(x)}{x^2} \leq \Psi(x) \leq \frac{\Phi(x)}{x}$$

On admettra qu'on a également les inégalités :

$$\forall x \in I, \quad \frac{\Phi(x)}{x} \leq \Psi(x) \leq \frac{\Phi(x)}{x^2}$$

- (c) En déduire un encadrement de Φ sur J et un autre sur I .

Démontrer que Φ est prolongeable par continuité en 1. Dans la suite, on note encore Φ le prolongement obtenu sur $\mathbb{R}_+^*$.

- (d) Montrer que le développement limité de Φ en 1 à l'ordre 2 est :

$$\Phi(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \ln(2) + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{4} + o((x-1)^2)$$

- (e) En déduire que Φ est dérivable en 1, donner une équation de sa tangente en ce point et décrire la position de la courbe de Φ par rapport à cette tangente au voisinage de ce point.

3. Démontrer que Φ est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

4. (a) Démontrer que :

$$\forall x \in J, \exists c_x \in [x, x^2], \quad f(c_x) = \frac{1}{x^2 - x} \Phi(x)$$

- (b) En déduire un encadrement de $\Phi(x)$ sur J ne faisant pas apparaître le réel c_x .

- (c) Donner la limite de Φ en $+\infty$ et démontrer que :

$$\Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{x^2}{\ln(x)}\right)$$

– FIN DE L'ÉPREUVE –