

DEVOIR SURVEILLÉ 7

durée de l'épreuve : 2h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.
- Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte deux pages et est composé de trois exercices indépendants.

Exercice 1 (un développement limité et une limite).

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Calcul d'un développement limité.

- (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{e^{-x} + e^x}$$

- (b) En déduire le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction :

$$F : x \mapsto \operatorname{Arctan}(e^x)$$

2. Déterminer la valeur de la limite :

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Exercice 2 (étude d'une famille de polynômes).

1. Factoriser le polynôme $P = (X + 1)^4 - (X - 1)^4$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans la suite de l'exercice le polynôme $P_n = (X + 1)^{2n} - (X - 1)^{2n}$.

2. On note \mathcal{R} l'ensemble des racines complexes du polynôme P_n . Est-il possible que cet ensemble soit vide? Justifier.
3. Montrer que X divise P_n .
4. Déterminer (en le justifiant) le degré de P_n , ainsi que son coefficient dominant.
5. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est une racine de P_n si et seulement si $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{2n} = 1$.

- (b) Résoudre l'équation $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{2n} = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, et en déduire que :

$$\mathcal{R} = \{0\} \cup \left\{ -\frac{i}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \mid k \in \llbracket 1, 2n-1 \rrbracket \setminus \{n\} \right\}$$

- (c) En déduire la factorisation de P_n comme produit de facteurs irréductibles sur \mathbb{C} .

6. Déterminer la valeur de la somme $S = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}$.

Exercice 3 (développement asymptotique d'une suite implicite).

On considère l'équation $\tan(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation proposée admet une unique solution x_n dans l'intervalle :

$$I_n = \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$$

2. Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_n en fonction de $\text{Arctan}(x_n)$.
(b) En déduire que :

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$$

4. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

- (b) En déduire que :

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

– FIN DE L'ÉPREUVE –