Devoir Surveillé 7

un corrigé

Exercice 1 (un développement limité et une limite).

1. (a) On sait que $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$ donc (comme $-x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$) :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \mathrm{o}(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 2 + x^2 + \mathrm{o}(x^3)\end{aligned}$$

donc (en utilisant le fait que $\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ ainsi que le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\frac{1}{1+u}$) :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)\right)$$

d'où :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^3)}$$

(b) La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x} = f(x)$$

donc, en intégrant le développement limité obtenu à la question précédente, on obtient :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \mathrm{o}(x^4)$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \mathrm{o}(x^4)}$$

car $\mathrm{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}\cdot$

2. On sait que $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \mathrm{o}(u^2)$ donc, comme $-x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a :

$$\begin{aligned}\cos(x) - \sqrt{1 - x^2} &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right) + \mathrm{o}(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{6} + \mathrm{o}(x^4)\end{aligned}$$

d'où l'on tire que :

$$\frac{\cos(x) - \sqrt{1 - x^2}}{x^4} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{6} + \mathrm{o}(1)$$

Par conséquent :

$$\boxed{\ell = \frac{1}{6}}$$

Exercice 2 (étude d'une famille de polynômes).

1. On factorise le polynôme P :

$$\begin{aligned} P &= \big((X+1)^2 - (X-1)^2\big)\big((X+1)^2 + (X-1)^2\big) \\ &= 8X(X^2+1) \end{aligned}$$

Le polynôme X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$ (ses racines étant $\pm i$) donc :

$$\boxed{\text{la factorisation dans } \mathbb{R}[X] \text{ est } P = 8X(X^2+1) \text{ et celle dans } \mathbb{C}[X] \text{ est } P = 8X(X-i)(X+i)}$$

2. Le polynôme P_n est non constant (car $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = 2^{2n} \neq 0$) donc P_n admet au moins une racine complexe (d'après le théorème de D'Alembert-Gauss). Par conséquent :

$$\boxed{\text{l'ensemble } \mathscr{R} \text{ est non vide}}$$

3. On a $P_n(0) = 0$ donc :

$$\boxed{X \text{ divise } P_n}$$

4. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \big(1-(-1)^{2n-k}\big) X^k \\ &= \binom{2n}{2n} \underbrace{\big(1-(-1)^{2n-2n}\big)}_{=0} X^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n}{k} \big(1-(-1)^{2n-k}\big) X^k \\ &= \underbrace{2(2n)X^{2n-1}}_{k=2n-1} + \sum_{k=0}^{2n-2} \binom{2n}{k} \big(1-(-1)^{2n-k}\big) X^k \end{aligned}$$

Comme $2(2n) \neq 0$ et $\deg\left(\sum_{k=0}^{2n-2} \binom{2n}{k} \big(1-(-1)^{2n-k}\big) X^k\right) \leqslant 2n-2$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{le polynôme } P_n \text{ est de degré } 2n-1 \text{ et son coefficient dominant vaut } 4n}$$

5. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On remarque que 1 n'est pas une racine de P_n (car $P_n(1) = 2^{2n} \neq 0$). Ainsi :

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 \iff (z+1)^{2n} - (z-1)^{2n} = 0 &\iff (z+1)^{2n} = (z-1)^{2n} \\ &\iff \frac{(z+1)^{2n}}{(z-1)^{2n}} = 1 \qquad (\text{car } z \neq 1) \\ &\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{2n} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{z \text{ est une racine de } P_n \text{ si et seulement si } \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{2n} = 1}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On a :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{2n} = 1 \iff \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}_{2n} \iff \left(\exists\, k \in [\![0, 2n-1]\!],\ \frac{z+1}{z-1} = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{2n}}\right)$$

Or, pour tout $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{2n}} &\iff z+1 = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} z - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} \\ &\iff z\left(\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - 1\right) = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} + 1 \end{aligned}$$

Cette équation n'admet pas de solution si $k = 0$ (le membre de gauche vaut 0 dans ce cas, et le membre de droite est égal à 2) et, si $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, on a $\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} \neq 1$ donc :

$$\frac{z+1}{z-1} = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} \iff z = \frac{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}+1}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}-1} = -\frac{i}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \qquad (\text{si } k \neq n)$$

et, si $k = n$, alors le numérateur est nul et donc la solution est $z = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation proposée sont } 0 \text{ et les nombres complexes } -\frac{i}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \text{ où } k \in [\![1, 2n-1]\!] \setminus \{n\}}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\mathscr{R} = \{0\} \cup \left\{ -\frac{i}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \,\middle|\, k \in [\![1, 2n-1]\!] \setminus \{n\} \right\}}$$

(c) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\frac{k\pi}{2n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tandis que pour tout $k \in [\![n+1, 2n-1]\!]$, on a $\frac{k\pi}{n+1} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. En utilisant la croissance stricte de la fonction tan sur les intervalles $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et le signe de cette fonction sur ces intervalles, on a :

$$\tan\left(\frac{(n+1)\pi}{2n}\right) < \tan\left(\frac{(n+2)\pi}{2n}\right) < \cdots < \tan\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) < 0 < \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) < \cdots < \tan\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$$

On en déduit que les racines de P_n sont deux à deux distinctes. On en compte $2n-1$ et le polynôme P_n est de degré $2n-1$, donc ces racines sont simples. Par ailleurs, on a vu à la question 4. que le coefficient dominant de P_n vaut $4n$) donc :

$$\boxed{\text{la factorisation de } P_n \text{ dans } \mathbb{C}[X] \text{ est } P_n = 4nX \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{2n-1} \left(X + \frac{i}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \right)}$$

6. En écrivant le polynôme P_n sous la forme $P_n = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k X^k$ (où $a_0, \ldots, a_{2n-1} \in \mathbb{R}$ et $a_{2n-1} \neq 0$), on sait d'après les formules de Viète que la somme des racines de P_n vaut :

$$0 + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{-i}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} = -\frac{a_{2n-2}}{a_{2n-1}}$$

Or on a vu à la question 4. que $a_{2n-2} = 0$ donc :

$$\boxed{\text{la somme } S \text{ est égale à } 0}$$

Exercice 3 (développement asymptotique d'une suite implicite).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : x \longmapsto \tan(x) - x$ est continue sur l'intervalle I_n. De plus, elle y est dérivable et :

$$\forall x \in I_n, \qquad f'(x) = (1 + \tan(x)^2) - 1 = \tan(x)^2 \begin{cases} > 0 & \text{si } x \neq n\pi \\ = 0 & \text{si } x = n\pi \end{cases}$$

La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle I_n. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de l'intervalle I_n sur l'intervalle :

$$f(I_n) =]-\infty, +\infty[$$

car :

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-} f(x) = +\infty$$

En effet, la fonction tangente est π-périodique et on sait que :

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$$

Comme $0 \in f(I_n)$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{l'équation } f(x)=0 \text{ admet une unique solution (notée } x_n\text{) dans l'intervalle } I_n}$$

2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad -\frac{\pi}{2}+n\pi \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2}+n\pi$$

Or :

$$\pm\frac{\pi}{2}+n\pi \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$$

donc, d'après le théorème des gendarmes pour les équivalents, on peut conclure que :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que :

$$x_n = \tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$$

car la fonction tan est π-périodique. Comme $x_n \in I_n$, on a $x_n - n\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Or on sait que $\operatorname{Arctan}\circ\tan = \operatorname{Id}_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ donc :

$$\operatorname{Arctan}(x_n) = \operatorname{Arctan}(\tan(x_n-n\pi)) = x_n - n\pi$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = n\pi + \operatorname{Arctan}(x_n)}$$

(b) On sait que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (d'après l'équivalent obtenu à la question 2.) et que $\operatorname{Arctan}(X) \xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$ donc, d'après la caractérisation séquentielle de la limite, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x_n) = \frac{\pi}{2},$$

ce que l'on peut réécrire :

$$\operatorname{Arctan}(x_n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1)$$

En utilisant maintenant l'égalité obtenue à la question 3.(a), il vient :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1)}$$

4. (a) La fonction $g : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables (on sait en effet que la fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, on peut conclure que g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, la valeur de cette constante étant :

$$g(1) = 2\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a (d'après les question 3.(a) et 4.(a)) :

$$x_n = n\pi + \operatorname{Arctan}(x_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

cette dernière égalité étant licite car $x_n > 0$ si $n \geqslant 1$ (en effet, dans ce cas on a $I_n \subset \mathbb{R}_+^*$). Or $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc (on sait que $1/x_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$) :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi},$$

ce qui se réécrit :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$$