

# DEVOIR SURVEILLÉ 7

*un corrigé*

## Exercice 1 (mise en bouche).

1. (a) On sait que :

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + o(t^2)$$

- (b) On a  $\text{Arccos} \in \mathcal{D}] -1, 1[, \mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad \text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Or  $-x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  donc :

$$-\text{Arccos}'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$$

puis :

$$-\text{Arccos}'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$$

En intégrant ce développement limité, on obtient (puisque  $\text{Arccos}(0) = \pi/2$ ) :

$$\text{Arccos}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$$

2. On sait que :

$$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

De plus,  $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  donc, par substitution, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{ch}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) + \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right)^2 + o(x^4) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \end{aligned}$$

Ainsi, le  $\text{DL}_4(0)$  demandé est :

$$\frac{1}{\text{ch}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

3. (a) On a  $\sqrt{n} + n^2 + 3 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$  et  $e^n + e^{-n} + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^n$  car :

$$\frac{e^n + e^{-n} + 1}{e^n} = 1 + e^{-2n} + e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Par quotient d'équivalents, on a donc  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{e^n}$ . Or  $\frac{n^2}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  (par croissances comparées) donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

- (b) Comme  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$ , on a (par substitution) :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

De plus, on sait que  $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  (par croissances comparées) et que  $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  donc (par substitution) :

$$\tan\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

Par quotient d'équivalents, on obtient :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{\ln(n)}{n}} = \frac{1}{2\ln(n)}$$

Or  $\frac{1}{2\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0}$$

(c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $w_n = \exp\left[n^2 \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right]$ . Or  $\frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  donc :

$$\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n} \quad \text{puis (par produit)} \quad n^2 \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n$$

Donc  $n^2 \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  puis, par composition des limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty}$$

(d) On a  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc :

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

On en déduit que  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2} + o(1)$ . Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\frac{1}{2}}$$

4. On introduit la fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}$  (définie sur  $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ ). On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{x \ln(x) - x + 1}{(x-1) \ln(x)}$$

En posant  $x = 1 + h$ , on a :

$$f(1+h) = \frac{(1+h) \ln(1+h) - h}{h \ln(1+h)}$$

Or :

$$\begin{aligned} (1+h) \ln(1+h) - h &\underset{h \rightarrow 0}{=} (1+h) \left( h - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \right) - h \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{h^2}{2} + o(h^2) \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$  donc :

$$f(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{h^2/2}{h^2} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\ell = \lim_{h \rightarrow 0} f(1+h) = \frac{1}{2}}$$

## Exercice 2.

1. On a :

$$G = \{a(1, 1, 1, 1) + b(-2, 0, 2, 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

donc :

$$G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (-2, 0, 2, 1)) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4$$

La famille  $\mathcal{G} = ((1, 1, 1, 1), (-2, 0, 2, 1))$  est génératrice de  $G$  et elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. Par conséquent,  $\mathcal{G}$  est une base de  $G$  et donc :

$$\dim(G) = \text{Card}(\mathcal{G}) = 2$$

Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . On a :

$$(x, y, z, t) \in F \iff \begin{cases} y &= x + z - t = z + t \\ x &= 2t \end{cases}$$

donc :

$$F = \{(2t, z + t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} = \{z(0, 1, 1, 0) + t(2, 1, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$$

Par conséquent :

$$F = \text{Vect}((0, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 1)) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4$$

Une famille génératrice de  $F$  est  $\mathcal{F} = ((0, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 1))$  et celle-ci est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. Finalement,  $\mathcal{F}$  est une base de  $F$  et donc :

$$\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 2$$

2. Montrons que  $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ .

- ★ D'après la question précédente, on a  $\dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ .
- ★ Il reste à montrer que  $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ . L'inclusion  $\{0_{\mathbb{R}^4}\} \subset F \cap G$  est évidente car  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^4$ . Soit  $(x, y, z, t) \in F \cap G$ . Comme  $(x, y, z, t) \in G$ , il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que :

$$(x, y, z, t) = (a - 2b, a, a + 2b, a + b)$$

Or  $(x, y, z, t) \in F$  donc :

$$a - 2b - a + a + 2b - (a + b) = 0 \text{ et } a - 2b - 2(a + b) = 0 \quad i.e. \quad a = b = 0$$

Ainsi,  $(x, y, z, t) = 0_{\mathbb{R}^4}$ , ce qui démontre la deuxième inclusion  $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ . Par double inclusion,  $F$  et  $G$  sont donc en somme directe, *i.e.*  $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ .

Finalement :

$$\mathbb{R}^4 = F \oplus G$$

## Exercice 3.

1. Tout d'abord, on a  $F \subset E$ . De plus, la fonction nulle  $\tilde{0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est solution de  $(\mathcal{E})$  sur  $\mathbb{R}$  car  $\tilde{0}'' = \tilde{0}$  donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{0}''(x) + (1 + x^2)\tilde{0}(x) = 0 + (1 + x^2) \times 0 = 0$$

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $y, z \in F$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a (par linéarité de la dérivation) :

$$\begin{aligned} (y + \lambda z)''(x) - (1 + x^2)(y + \lambda z)(x) &= y''(x) + \lambda z''(x) - (1 + x^2)y(x) - \lambda(1 + x^2)z(x) \\ &= y''(x) - (1 + x^2)y(x) + \lambda(z''(x) - (1 + x^2)z(x)) \\ &= 0 + \lambda \times 0 \quad (\text{car } y, z \in F) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc  $y + \lambda z \in F$ . Finalement :

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$

2. La fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  (par composition de fonctions qui le sont) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = x e^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad f''(x) = (1 + x^2) e^{\frac{x^2}{2}}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - (1 + x^2)f'(x) = (1 + x^2) e^{\frac{x^2}{2}} - (1 + x^2) e^{\frac{x^2}{2}} = 0$$

Ainsi :

$$\boxed{f \in F}$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$  est une primitive de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$ . En particulier, cette fonction est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = x e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{\frac{x^2}{2}} \times e^{-x^2} = x e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{-\frac{x^2}{2}}$$

De la même façon,  $g'$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  (et donc  $g \in E$ ) et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) &= (1 + x^2) e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt + \underbrace{x e^{\frac{x^2}{2}} \times e^{-x^2} - x e^{-\frac{x^2}{2}}}_{=0} \\ &= (1 + x^2) e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

et donc on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) = (1 + x^2)g(x)$$

Autrement dit :

$$\boxed{g \in F}$$

3. Soit  $u, v \in F$ . Alors la fonction  $u'v - uv'$ , notée  $w$ , est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (puisque  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ ) et :

$$w' = u''v + u'v' - u'v' - uv'' = u''v - uv''$$

En utilisant le fait que  $u$  et  $v$  satisfont l'équation différentielle ( $\mathcal{E}$ ), on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad w'(x) = u''(x)v(x) - u(x)v''(x) = (1 + x^2)u(x)v(x) - (1 + x^2)u(x)v(x) = 0$$

La fonction  $w'$  est donc nulle sur  $\mathbb{R}$  et donc  $w$  est constante sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } (u, v) \in F^2, \text{ la fonction } u'v - uv' \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$$

4. Soit  $h \in F$ . La fonction  $\frac{h}{f}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annulant pas) et :

$$\left(\frac{h}{f}\right)' = \frac{h'f - hf'}{f^2}$$

Comme  $f, h \in F$ , on sait d'après la question précédente qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\frac{h}{f}\right)'(x) = \frac{\alpha}{f^2(x)} = \alpha e^{-\frac{x^2}{2}}$$

En intégrant cette relation, on en déduit qu'il existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{h(x)}{f(x)} = \alpha \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \beta$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \alpha e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \beta e^{\frac{x^2}{2}} = \alpha g(x) + \beta f(x)$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall h \in F, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad h = \alpha g + \beta f}$$

5. D'après la question précédente, on a l'inclusion  $F \subset \text{Vect}(f, g)$ . Par ailleurs, on sait que  $f, g \in F$  et que  $F$  est un espace vectoriel donc  $\text{Vect}(f, g) \subset F$ . Par double inclusion, on a bien l'égalité :

$$\boxed{F = \text{Vect}(f, g)}$$

6. La famille  $\mathcal{B} = (f, g)$  est génératrice de  $F$  d'après la question précédente. Montrons maintenant qu'elle est libre. Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $\alpha f + \beta g = \tilde{0}$  (fonction nulle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ). Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha f(x) + \beta g(x) = \tilde{0}(x) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha e^{\frac{x^2}{2}} + \beta e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$$

Pour  $x = 0$ , on a  $\alpha = 0$ . En dérivant la relation restante, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \beta x e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt + \beta e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Le choix  $x = 0$  nous donne  $\beta = 0$ . La famille  $\mathcal{B}$  est donc libre. Finalement :

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } F \text{ et } \dim(F) = \text{card}(\mathcal{B}) = 2}$$

## Problème 1 (série harmonique alternée).

### Première partie : étude de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. On a :

$$\boxed{I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[ \ln(1+x) \right]_0^1 = \ln(2)}$$

et :

$$\boxed{I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+x} \right) dx = \left[ x - \ln(1+x) \right]_0^1 = 1 - \ln(2)}$$

De plus<sup>1</sup> :

$$\frac{X^2}{X+1} = \frac{X(X+1) - (X+1) + 1}{X+1} = X - 1 + \frac{1}{X+1}$$

Ainsi :

$$\boxed{I_2 = \left[ \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x) \right]_0^1 = \ln(2) - \frac{1}{2}}$$

2. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left( \frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx$$

Pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $\frac{x^n}{1+x} \geq 0$  et  $x-1 \leq 0$  donc  $\frac{x^n(x-1)}{1+x} \leq 0$ . Par positivité de l'intégrale, on a donc  $I_{n+1} - I_n \leq 0$ . Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

- (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $I_n \geq 0$  par positivité de l'intégrale car :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \frac{x^n}{1+x} \geq 0$$

La suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante et minorée par 0 ; le théorème de la limite monotone nous permet donc de conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}}$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \left( \frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x} \right) dx = \int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}}$$

1. Il s'agit de décomposer en éléments simples une fraction rationnelle.

On sait que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Notons  $\ell \in \mathbb{R}$  sa limite. Alors  $I_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ . De plus  $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans la relation de récurrence précédemment obtenue, on obtient  $2\ell = 0$ , c'est-à-dire  $\ell = 0$ . Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$$

4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La suite  $(I_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  est décroissante donc  $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$  donc :

$$I_n + I_{n+1} \leq 2I_n \quad \text{et} \quad I_{n-1} + I_n \geq 2I_n$$

En utilisant l'égalité obtenue à la question 2., ces deux inégalités se réécrivent :

$$\frac{1}{n+1} \leq 2I_n \leq \frac{1}{(n-1)+1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$$

Comme  $\frac{1}{2n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ , on déduit du théorème des gendarmes pour les équivalents que :

$$\boxed{I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}$$

## Deuxième partie : étude de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$

5. (a) On utilise un raisonnement par récurrence.

★ On a  $A_1 = 1$  et (en utilisant la question 1.) :

$$\ln(2) + (-1)^2 I_1 = \ln(2) + (1 - \ln(2)) = 1 = A_1$$

L'égalité est donc vérifiée pour  $n = 1$ .

★ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $A_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$ . Montrons que :

$$A_{n+1} = \ln(2) + (-1)^{n+2} I_{n+1}$$

On a (en utilisant la relation de Chasles pour les sommes et l'hypothèse de récurrence) :

$$A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}}_{=A_n} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$$

D'après la question 3., on a  $I_n = \frac{1}{n+1} - I_{n+1}$  donc :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \ln(2) + (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n+1} - I_{n+1} \right) - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= \ln(2) - (-1)^{n+1} I_{n+1} \\ &= \ln(2) + (-1)^{n+2} I_{n+1} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang  $n+1$ .

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n}$$

(b) La suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 et la suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée donc  $(-1)^{n+1} I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . La relation obtenue à la question précédente entraîne que :

$$\boxed{\text{la suite } (A_n)_{n \geq 1} \text{ est convergente de limite } \ln(2)}$$

6. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons :

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^n & v(x) &= \frac{1}{1+x} \\ u(x) &= \frac{x^{n+1}}{n+1} & v'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  donc, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[ \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \right]_0^1 - \int_0^1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^2} dx \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx}$$

7. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ . Il est clair que  $(1+x)^2 \geq 1$  donc (par décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$ ), on a  $0 \leq \frac{1}{(1+x)^2} \leq 1$ . Comme  $x^{n+1} \geq 0$ , on obtient  $0 \leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leq x^{n+1}$ . Par (positivité et) croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx \quad \text{où} \quad \int_0^1 x^{n+1} dx = \left[ \frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+2}}$$

8. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On utilisant successivement les questions 5.(a) et 6., on a :

$$A_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} J_n \right) = \ln(2) + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} J_n$$

D'après la question 7., on a :

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} J_n \right| = \frac{1}{n+1} J_n \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

donc  $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Pour conclure, il suffit d'établir que :

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (*)$$

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\left| \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} \right| = \left| \frac{2n - (2n+2)}{2n(2n+2)} \right| = \frac{1}{n(2n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

car  $n(2n+2) = 2n^2 + 2n \geq n^2$ . L'estimation (\*) est donc démontrée. Finalement, on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(2) + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

## Problème 2 (étude d'une fonction définie par une intégrale).

1. (a) Soit  $x \in J$ . Pour tout  $t \in [x, x^2]$ , on a  $t \geq x > 1$  donc  $\ln(t) > 0$ . Par positivité de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens), on a  $\Phi(x) \geq 0$ .

Si  $x \in I$ , alors  $0 < x^2 \leq x < 1$  et la fonction  $f$  est négative sur  $]0, 1[$  donc  $\int_{x^2}^x f(t) dt \leq 0$  (positivité de

l'intégrale) puis  $\Phi(x) = - \int_x^{x^2} f(t) dt \geq 0$ . Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est positive sur les intervalles } I \text{ et } J}$$

- (b) Comme  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I \cup J$ , on a :

$$\forall x \in I \cup J, \quad \Phi(x) = \left[ F(t) \right]_x^{x^2} = F(x^2) - F(x)$$

Or la fonction  $F$  est dérivable sur  $I \cup J$  (en tant que primitive de  $f$  sur  $I \cup J$ ) donc, par composition et différence de fonctions dérivables :

la fonction  $\Phi$  est dérivable sur  $I \cup J$

et :

$$\forall x \in I \cup J, \quad \Phi'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Or les nombres  $x-1$  et  $\ln(x)$  sont de même signe pour tout  $x \in I \cup J$  donc  $\Phi'$  est positive sur  $I \cup J$ . On en déduit que :

la fonction  $\Phi$  est croissante sur  $I$  et sur  $J$

2. (a) Une primitive de la fonction  $t \mapsto \frac{1/t}{\ln(t)}$  sur  $I \cup J$  est  $t \mapsto \ln(|\ln(t)|)$  donc :

$$\forall x \in I \cup J, \quad \Psi(x) = \left[ \ln(|\ln(t)|) \right]_x^{x^2} = \ln(|\ln(x^2)|) - \ln(|\ln(x)|) = \ln(2)$$

- (b) Soit  $x \in J$ . On a :

$$\frac{\Phi(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt = \int_x^{x^2} \frac{\frac{t}{x^2}}{t \ln(t)} dt$$

Pour tout  $t \in [x, x^2]$ , on a  $\frac{t}{x^2} \leq 1$  et  $\ln(t) > 0$  (car  $t \geq x > 1$ ) donc :

$$\forall t \in [x, x^2], \quad \frac{\frac{t}{x^2}}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{t \ln(t)}$$

La propriété de croissance de l'intégrale nous donne (comme  $x \geq 1$ , on a  $x^2 \geq x$ ) :

$$\frac{\Phi(x)}{x^2} \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt \quad i.e. \quad \frac{\Phi(x)}{x^2} \leq \Psi(x)$$

Ainsi :

$$\forall x \in J, \quad \frac{\Phi(x)}{x^2} \leq \Psi(x) \leq \frac{\Phi(x)}{x}$$

- (c) On en déduit que :

$$(\forall x \in J, x\Psi(x) \leq \Phi(x) \leq x^2\Psi(x)) \quad \text{et} \quad (\forall x \in I, x^2\Psi(x) \leq \Phi(x) \leq x\Psi(x))$$

*i.e.*, en utilisant la question 2.(a) :

$$(\forall x \in J, \ln(2)x \leq \Phi(x) \leq \ln(2)x^2) \quad \text{et} \quad (\forall x \in I, \ln(2)x^2 \leq \Phi(x) \leq \ln(2)x)$$

Ces inégalités et le théorème des gendarmes fournissent les limites :

$$\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ln(2) \quad \text{et} \quad \Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \ln(2)$$

Ainsi :

la fonction  $\Phi$  est prolongeable par continuité en 1 (en posant  $\Phi(1) = \ln(2)$ )

- (d) Pour tout  $x \in I \cup J$ , on a  $\Phi'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$ . Posons  $x = 1+h$ . Alors :

$$\Phi'(1+h) = \frac{h}{\ln(1+h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{h}{h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{h}{2} + o(h)}$$

Or  $\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + o(u)$  et  $-\frac{h}{2} + o(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  donc :

$$\Phi'(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{h}{2} + o(h) \quad i.e. \quad \Phi'(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} 1 + \frac{x-1}{2} + o(x-1)$$

En intégrant ce développement limité et sachant que  $\Phi(1) = \ln(2)$ , on obtient :

$$\Phi(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \ln(2) + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{4} + o((x-1)^2)$$

(e) Comme  $\Phi(1) = \ln(2)$ , on a :

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(1)}{x - 1} = 1 + \frac{x - 1}{4} + o(x - 1) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$$

donc :

la fonction  $\Phi$  est dérivable en 1 et  $\Phi'(1) = 1$ , une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_\Phi$  en 1 est  $y = x + \ln(2) - 1$ ; par ailleurs, l'équivalent  $\Phi(x) - x - \ln(2) + 1 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{(x - 1)^2}{4}$  nous permet d'affirmer que la courbe  $\mathcal{C}_\Phi$  se situe au-dessus de la tangente au voisinage de 1 (puisque l'équivalent obtenu est positif)

3. On a démontré que :

$$\forall x \in I, \quad \ln(2)x^2 \leq \Phi(x) \leq \ln(2)x$$

Le théorème des gendarmes nous donne  $\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  donc :

on peut prolonger  $\Phi$  par continuité en 0 (en posant  $\Phi(0) = 0$ )

On sait que  $\Phi$  est continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1]$ . De plus :

$$\Phi'(x) = \frac{x - 1}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \in \mathbb{R}$$

donc, d'après le théorème portant sur la limite de la dérivée :

la fonction  $\Phi$  est dérivable en 0 et  $\Phi'(0) = 0$

4. (a) Soit  $x \in J$ . La fonction  $F$  (qui est une primitive de  $f$  sur  $J$ ) est dérivable sur  $J$  donc elle est en particulier continue sur  $[x, x^2]$  et dérivable sur  $]x, x^2[$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c_x \in ]x, x^2[$  tel que :

$$F(x^2) - F(x) = (x^2 - x)F'(c_x) = (x^2 - x)f(c_x)$$

Or  $F(x^2) - F(x) = \Phi(x)$  donc :

$$\forall x \in J, \quad \exists c_x \in [x, x^2], \quad f(c_x) = \frac{1}{x^2 - x} \Phi(x)$$

(b) Soit  $x \in J$ . On sait qu'il existe  $c_x \in [x, x^2]$  tel que  $\Phi(x) = (x^2 - x)f(c_x)$ . La fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$  est décroissante sur l'intervalle  $J$  et on a  $c_x \in [x, x^2]$  donc :

$$f(x^2) \leq f(c_x) \leq f(x) \quad i.e. \quad \frac{1}{\ln(x^2)} \leq f(c_x) \leq \frac{1}{\ln(x)}$$

En multipliant par  $x^2 - x > 0$  (rappelons que  $x > 1$  donc  $x^2 > x$ ), on obtient l'encadrement :

$$\forall x \in J, \quad \frac{x^2 - x}{2 \ln(x)} \leq \Phi(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln(x)}$$

(c) On sait que :

$$\forall x \in J, \quad \Phi(x) \geq \ln(2)x$$

et  $\ln(2)x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  donc, d'après le théorème de comparaison :

$$\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

De plus, en utilisant les inégalités obtenues à la question précédente et en divisant par  $\frac{x^2}{\ln(x)} > 0$  (pour  $x > 1$ ), on a :

$$\forall x \in J, \quad 0 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} \leq \frac{\Phi(x) \ln(x)}{x^2} \leq 1 - \frac{1}{x} \leq 1$$

Ainsi, la fonction  $x \mapsto \frac{\Phi(x) \ln(x)}{x^2}$  est bornée sur l'intervalle  $J$  donc :

$$\Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{x^2}{\ln(x)}\right)$$